Scuola di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
C.d.L. in Matematica

Anno Accademico 2015-2016
Tesi di Laurea Magistrale

Metodo di Baire per l'esistenza di mappe isometriche

Baire method for existence of isometric maps

Candidato:
Tommaso Di Marco
tommaso.dimarco@stud.unifi.it

Relatore:
Prof. Emanuele Paolini
emauele.paolini@unifi.it

Indice

Introduzione

In questa tesi studieremo il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} Du(x) \in O(m,\, n) & \text{q. o. in } \Omega \ , \\ u(x) = \varphi(x) & \text{se } x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

in cui $O(m,n)$ è l'insieme delle matrici ortogonali di m righe ed n colonne. In particolare dimostreremo il seguente teorema.

Teorema. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato e siano $E = O(m,n)$ e coE il suo inviluppo convesso. Sia $\varphi \in C^1_{piec}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m\right)$ tale che $D\varphi \in E$ oppure $\|D\varphi\| < 1$ quasi ovunque in Ω, allora esiste (un insieme denso di) $u\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tale che $u \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ e*

$$\begin{cases} Du(x) \in E & \text{per q. o. } x \in \Omega, \\ u \in \varphi + W^{1,\infty}_0(\Omega, \mathbb{R}^m) \,. \end{cases}$$

L'idea di studiare questo problema nasce dal lavoro di Cellina in [2] in cui viene studiato l'analogo problema scalare e unidimensionale, in cui l'insieme delle matrici ortogonali coincide con $\{-1, 1\}$. In quel caso, viene dimostrato che l'insieme delle soluzioni del problema

$$\begin{cases} u'(x) \in \{-1, 1\} & \text{se } x > 0, \\ u(0) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

in cui $u : [0,1] \to \mathbb{R}$, è un sottoinsieme denso dell'insieme delle soluzioni di

$$\begin{cases} u' \in [-1, 1] & \text{se } x > 0, \\ u(0) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

utilizzando il seguente teorema delle categorie di Baire (per una dimostrazione si veda [1]).

Teorema (di Baire)**.** *Sia V uno spazio metrico completo e siano V^k, $k \in \mathbb{N}$, sottoinsiemi aperti densi di V. Allora*

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} V^k$$

è densa in V. In altre parole, l'intersezione numerabile di aperti densi è densa.

Il teorema di Baire ha una formulazione equivalente in termini di insiemi chiusi e afferma che l'unione numerabile di chiusi con interno vuoto ha interno vuoto.

Il lavoro di questa tesi si basa principalmente sul lavoro [5] di Dacorogna e Marcellini. Dopo aver definito la proprietà di rilassamento di un insieme di matrici, gli autori dimostrano il seguente teorema.

Teorema. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e siano $F_i \colon \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$, con $i = 1, \cdots, I \in \mathbb{N}$, funzioni continue e quasi-convesse. Siano $E, K \subset \mathbb{R}^{m\times n}$ tali che*

$$E = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{m\times n} \colon\; F_i(\xi) = 0,\; i = 1, \cdots, I\right\}$$

e

$$K \subset \left\{\xi \in \mathbb{R}^{m\times n} \colon\; F_i(\xi) \leq 0,\; i = 1, \cdots, I\right\}$$

tali che K abbia la proprietà di rilassamento rispetto a E.

Sia $\varphi \in C^1_{piec}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m\right)$ tale che $D\varphi(x) \in E \cup intK$, allora esiste (un insieme denso di) $u \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ tale che

$$\begin{cases} F_i\left(Du(x)\right) = 0 & i = 1, \cdots, I, \text{ per q. o. } x \in \Omega, \\ u \in \varphi + W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m). \end{cases}$$

Dopo aver introdotto il concetto di valori singolari λ_i di un matrice $\xi \in \mathbb{R}^{n\times n}$, viene dimostrato il seguente teorema, valido per funzioni da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$, sufficiente a dimostrare l'esistenza di una soluzione di (1) nel caso in cui $E = O(n)$.

Teorema. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e siano $a_i \colon \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $i = 1, \cdots, n$, funzioni continue tali che*

$$0 < c \leq a_1(x, s) \leq \cdots \leq a_n(x, s)$$

per una qualche costante $c \in \mathbb{R}$ e per ogni $(x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$.

Sia $\varphi \in C^1_{piec}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m\right)$ tale che

$$\prod_{i=\nu}^{n} \lambda_i \left(D\varphi(x)\right) < \prod_{i=\nu}^{n} a_i \left(x, \varphi(x)\right) \tag{4}$$

per quasi ogni $x \in \Omega$, con $\nu = 1, \cdots, n$ (in particolare $\varphi \equiv 0$). Allora esiste (un insieme denso di) $u \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ tale che

$$\begin{cases} \lambda_i \left(Du(x)\right) = a_i \left(x, u(x)\right) & q.\ o.\ x \in \Omega,\ i = 1, \cdots, n, \\ u(x) = \varphi(x) & se\ x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{5}$$

Nella prima parte di questa tesi riporteremo da [5] alcune definizioni e teoremi a proposito di insiemi e funzioni convessi. Studieremo poi le proprietà dei valori singolari e delle matrici ortogonali necessarie a osservare che il problema (5) può essere riscritto nella forma $Du(x) \in O(n)$ nel caso in cui le funzioni $a_i \equiv 1$ per ogni $i = 1, \cdots, n$ e quindi la condizione (4) può essere riscritta con $\lambda_n \left(D\varphi(x)\right) < 1$ per quasi ogni $x \in \Omega$. Ispirandosi alla dimostrazione del teorema presente in [5], lo amplieremo al caso di matrici ortogonali rettangolari. Nel corso della dimostrazione costruiremo gli insiemi

$$W = \Big\{ u \in C^1_{piec}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m\right) :\ u \in \varphi + W^{1,\infty}_0 \left(\Omega, \mathbb{R}^m\right),\ Du(x) \in E \cup intK \\ \text{q. o. } x \in \Omega \Big\}$$

e

$$V = \overline{W}^{C^0}$$

e dimostreremo che un insieme di soluzioni del problema (1) è denso in V, in norma uniforme. Per ogni $\varepsilon > 0$, esisterà $u_\varepsilon \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ soluzione di (1), tale che

$$\|u_\varepsilon - \varphi\|_{L^\infty} \le \varepsilon.$$

La tesi è strutturata come segue. Nel capitolo 1 introdurremo i vari concetti di convessità per funzioni e insiemi. In particolare, definiremo la quasi-convessità, la convessità di rango 1, la policonvessità, la separata convessità e i rispettivi inviluppo.

Nel capitolo 3, definiremo la norma 2, la norma indotta e i valori singolari di una matrice. Osserveremo che l'insieme delle matrici ortogonali è costituito dalle matrici con $l = \min\{m, n\}$ valori singolari uguali a 1 (e gli eventuali altri nulli). Caratterizzeremo l'inviluppo convesso dell'insieme delle matrici ortogonali dimostrando che esso corrisponde all'insieme delle matrici con norma indotta minore o uguale a 1, o, equivalentemente, a quello delle matrici con ogni valore singolare minore o uguale a 1. Definiremo poi le proprietà del segmento e di approssimazione, caratteristiche di insiemi convessi e convessi di rango 1. Dimostreremo che nel caso di insiemi convessi di rango 1 la prima proprietà implica la seconda e dimostreremo che gli inviluppi convesso e convesso di rango 1 dell'insieme $E = O(m, n)$ coincidono.

Nel capitolo 4 vedremo la dimostrazione del teorema principale. Suddivideremo tale dimostrazione in due casi: quello unidimensionale e quello vettoriale. L'idea che sta alla base della dimostrazione, come detto, è analoga a quella del teorema 6.3 in [5], ma funziona per dimostrare il teorema per matrici rettangolari. In entrambi i casi, premetteremo al teorema alcuni lemmi di approssimazione.

Capitolo 1

Convessità di insiemi e funzioni

1.1 Il caso convesso

Iniziamo definendo funzioni e insiemi convessi.

Definizione 1.1. Una funzione $f\colon \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ è detta convessa se

$$f\left(tA + (1-t)B\right) \leq tf(A) + (1-t)f(B)$$

per ogni $t \in [0,1]$ e ogni $A, B \in \mathbb{R}^N$.

Un insieme $E \subset \mathbb{R}^N$ è detto convesso se per ogni $t \in [0,1]$ e ogni $A, B \in E$,

$$tA + (1-t)B \in E.$$

Si definisce poi l'inviluppo convesso coE come il più piccolo insieme convesso contenente E. In particolare, coE è convesso. Analogamente, l'inviluppo convesso di una funzione $f\colon \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ è la più grande funzione convessa tra quelle minori o uguali di f. In altre parole:

- $coE = \inf\{K\colon\ K \supset E,\ K \text{ convesso}\}$,
- $Cf = \sup\{g \leq f\colon\ g \text{ convessa}\}$.

Il seguente teorema di Carathéodory permette di caratterizzare l'inviluppo convesso di un insieme E come l'insieme delle combinazioni convesse di elementi di E. Ne omettiamo la dimostrazione, che può essere trovata in [3].

Teorema 1.2 (di Carathéodory)**.** *Sia $E \subset \mathbb{R}^N$, allora*

$$coE = \left\{ \xi = \sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i \xi_i \in \mathbb{R}^N : \ \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1, \, \xi_i \in E \right\}.$$

Conseguenza diretta del teorema 1.2 sono le seguenti due proposizioni, in cui si caratterizzano ulteriormente gli inviluppi convessi di una funzione e di un insieme.

Proposizione 1.3. *Sia $f \colon \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$, allora:*

$$Cf(\xi) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{N+1} t_i f(\xi_i) : \ \xi = \sum_{i=1}^{N+1} t_i \xi_i, \, \sum_{i=1}^{N+1} t_i = 1 \right\}.$$

Proposizione 1.4. *Sia $E \subset \mathbb{R}^N$ e sia χ_E la sua funzione indicatrice, definita da*

$$\chi_E(\xi) = \begin{cases} 0 & \xi \in E, \\ +\infty & \xi \notin E. \end{cases}$$

Allora $C\chi_E = \chi_{coE}$ e

$$coE = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^N : \ f(\xi) \leq 0, \, \forall f \colon \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}, f\big|_E = 0, \, f \ \text{convessa} \right\}.$$

Dimostrazione. Poiché $E \subset coE$, si ha immediatamente che $\chi_{coE} \leq \chi_E$. Poiché poi coE è convesso, χ_{coE} è convessa e quindi, facendo l'inviluppo convesso, si ha che

$$\chi_{coE} \leq C\chi_E.$$

Per dimostrare la disuguaglianza inversa, è sufficiente mostrare che se $\chi_{coE}(\xi) = 0$, allora anche $C\chi_E(\xi) = 0$. Questo segue dal teorema 1.2. Infatti, se $\chi_{coE}(\xi) = 0$, allora $x \in coE$ e esistono $\xi_i \in E$, $\lambda_i \geq 0$ con $\sum \lambda_i = 1$, tali che

$$\xi = \sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i \xi_i.$$

Allora

$$\sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i \chi_E(\xi_i) = 0$$

e per il teorema 1.3 si ha che $C\chi_E(\xi) = 0$.

Dimostriamo adesso la seconda parte dell'enunciato. È immediato verificare che una funzione $f\colon \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ convessa è tale che $f\big|_E = 0$ se e solo se $f \le \chi_E$. Si deduce allora che per ogni funzione convessa che soddisfi tale proprietà, si ha

$$f \le C\chi_E = \chi_{coE}$$

e quindi

$$coE \subset \left\{\xi \in \mathbb{R}^N\colon\ f(\xi) \le 0,\, \forall f\colon \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}, f\big|_E = 0,\ f \text{ convessa}\right\}.$$

L'inclusione inversa deriva dal fatto che χ_{coE} è convessa e si annulla su E. □

Nelle sezioni 1.2 e 1.3 svilupperemo queste idee per definire altri tipi di convessità per funzioni e insiemi, con i relativi inviluppi.

Concludiamo questa sezione col dimostrare la continuità delle funzioni convesse come fatto in [3]. Introduciamo prima un concetto più debole di quello di funzione convessa, quello di funzione separatamente convessa.

Definizione 1.5. Una funzione $f\colon \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ è detta separatamente convessa se

$$f\left(tA + (1-t)B\right) \le tf\left(A\right) + (1-t)f\left(B\right)$$

per ogni $t \in [0,1]$ e ogni $A, B \in \mathbb{R}^N$, con $A - B = se_i$, $i = 1, ..., N$ e $s \in \mathbb{R}$, dove e_i è l'i-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^N$.

Teorema 1.6. *Siano $f\colon \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ separatamente convessa con $f \not\equiv \infty$ e $dom(f) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ f(x) < +\infty\}$. Allora f è localmente lipschitziana, e quindi continua, su $int\, dom(f)$.*

Dimostrazione. Dividiamo la dimostrazione in tre passi. Indicheremo con

$$|x|_\infty = \max\left\{|x_i|\colon\ i = 1, ..., N\right\}.$$

Step 1: Dimostriamo che se $x \in int\, dom(f)$, allora f è limitata in un intorno di x. Senza perdita di generalità, si può supporre che $x = 0$ e quindi, poiché $x \in int\, dom(f)$, esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$\left\{x = (x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N\colon\ |x|_\infty \le \varepsilon\right\} \subset dom(f). \tag{1.1}$$

Ponendo

$$a = \max\left\{f\left(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_N\right)\colon\ \varepsilon_i \in \{-\varepsilon, 0, \varepsilon\},\ \text{ per ogni } i = 1, ..., N\right\}$$

si deduce da (1.1) che $a < \infty$. Si afferma adesso che

$$\text{se } |x|_\infty \leq \varepsilon, \text{ allora } f(x) \leq a. \tag{1.2}$$

Si osserva che se $0 \leq x_N \leq \varepsilon$ e $\varepsilon_i \in \{-\varepsilon, 0, \varepsilon\}$, allora il fatto che f sia separatamente convessa nell'ultima variabile implica che

$$\begin{aligned} f(\varepsilon_1, ...\varepsilon_{N-1}, x_N) &\leq \frac{x_N}{\varepsilon} f(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{N-1}, \varepsilon) + \left(1 - \frac{x_N}{\varepsilon}\right) f(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{N-1}, 0) \leq \\ &\leq \frac{x_N}{\varepsilon} a + \left(1 - \frac{x_N}{\varepsilon}\right) a = a. \end{aligned}$$

Per la separata convessità di f rispetto a x_{N-1} e per la disuguaglianza precedente, si ha che se $0 \leq x_{N-1} \leq \varepsilon$, allora

$$\begin{aligned} f(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{N-2}, x_{N-1}, x_N) \leq & \frac{x_{N-1}}{\varepsilon} f(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{N-2}, \varepsilon, x_N) + \\ & + \left(1 - \frac{x_{N-1}}{\varepsilon}\right) f(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{N-2}, 0, x_N) \leq a. \end{aligned}$$

Iterando il ragionamento rispetto a tutte le variabili, si ottiene (1.2), cioè che se $x \in int\,dom(f)$, allora f è limitata in un intorno di x, come richiesto. Se qualche x_i è negativo si procede in modo analogo.

Step 2: Dimostriamo adesso che se $x \in int\,dom(f)$, allora f è continua in x. Ancora, senza perdita di generalità, si può supporre $x = 0$ e $f(0) = 0$. Per quanto visto nello Step 1, f è limitata in un intorno di $x = 0$, quindi esistono $\lambda > 0$ e $a > 0$ tali che

$$\text{se } |x|_\infty \leq \lambda, \text{ allora } f(x) \leq a. \tag{1.3}$$

Si fissi $\varepsilon > 0$ e, a meno di scegliere a più grande, si assuma che $\varepsilon \leq aN2^N$. Dimostriamo adesso che

$$\text{se } |x|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{aN2^N}\lambda, \text{ allora } |f(x)| \leq \varepsilon \tag{1.4}$$

indicando, per comodità, $\delta = \frac{\varepsilon}{aN2^N} \leq 1$. Per la separata convessità di f, si ha

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_1, ..., x_N) &= f\left(\delta\left[\frac{x_1}{\delta}, x_2, ..., x_N\right] + (1-\delta)[0, x_2, ..., x_N]\right) \leq \\ &\leq \delta f\left(\frac{x_1}{\delta}, x_2, ..., x_N\right) + (1-\delta) f(0, x_2, ..., x_N). \end{aligned}$$

Ripetendo il ragionamento per la seconda variabile, otteniamo

$$f(x) \leq \delta f\left(\frac{x_1}{\delta}, x_2, ..., x_N\right)+(1-\delta)\delta f\left(0, x_2, ..., x_N\right)+(1-\delta)^2 f\left(0, 0, x_3, ..., x_N\right)$$

e, iterando il ragionamento su tutte le variabili,

$$f(x) \leq \delta \sum_{i=1}^{N}(1-\delta)^{i-1} f\left(0, ..., 0, \frac{x_i}{\delta}, x_{i+1}, ..., x_N\right) + (1-\delta)^N f\left(0, ..., 0\right).$$

Se adesso assumiamo che

$$|x|_\infty \leq \delta\lambda = \frac{\varepsilon\lambda}{aN2^N} \leq \lambda,$$

possiamo dedurre, da (1.3) e dal fatto che $f(0) = 0$, che

$$f(x) \leq \delta a \sum_{i=1}^{N}(1-\delta)^{i-1} \leq \delta a N \leq \varepsilon$$

che è la seconda disuguaglianza in (1.4). Per ottenere (1.4), dobbiamo ancora dimostrare che $f(x) \geq -\varepsilon$. Abbiamo che:

$$\begin{aligned} 0 = f(0, ..., 0) &= f\left(\frac{1}{1+\delta}\left[0, ..., 0, x_N\right] + \frac{\delta}{1+\delta}\left[0, ..., 0, -\frac{x_N}{\delta}\right]\right) \leq \\ &\leq \frac{1}{1+\delta}\left[f\left(0, ..., 0, x_N\right) + \delta f\left(0, ..., 0, -\frac{x_N}{\delta}\right)\right]. \end{aligned}$$

Procedendo in modo analogo per la variabile x_{N-1}, si ottiene

$$\begin{aligned} f\left(0, ..., 0, x_N\right) &= f\left(\frac{1}{1+\delta}\left[0, ..., 0, x_{N-1}, x_N\right] + \frac{\delta}{1+\delta}\left[0, ..., 0, -\frac{x_{N-1}}{\delta}, x_N\right]\right) \leq \\ &\leq \frac{1}{1+\delta} f\left(0, ..., 0, x_{N-1}, x_N\right) + \frac{\delta}{1+\delta} f\left(0, ..., 0, -\frac{x_{N-1}}{\delta}, x_N\right) \end{aligned}$$

e quindi, combinando i due risultati

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{1}{(1+\delta)^2} f\left(0, ..., 0, x_{N-1}, x_N\right) + \frac{\delta}{(1+\delta)^2} f\left(0, ..., 0, -\frac{x_{N-1}}{\delta}, x_N\right) + \\ + \frac{\delta}{1+\delta} f\left(0, ..., 0, -\frac{x_N}{\delta}\right). \end{aligned}$$

Iterando il procedimento,

$$0 \leq \frac{1}{(1+\delta)^N} f(x_1, ..., x_N) + \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta}{(1+\delta)^{N-i+1}} f\left(0, ..., 0, -\frac{x_i}{\delta}, x_{i+1}, ..., x_N\right)$$

e quindi, se

$$|x|_\infty \leq \delta\lambda = \frac{\varepsilon\lambda}{aN2^N} \leq \lambda,$$

si trova, da (1.3), che

$$\begin{aligned} f(x_1, ..., x_N) &\geq -\delta \sum_{i=1}^{N} (1+\delta)^{i-1} f\left(0, ..., 0, -\frac{x_i}{\delta}, x_{i+1}, ..., x_N\right) \geq \\ &\geq -\delta a \sum_{i=1}^{N} (1+\delta)^{i-1} \geq -\delta a N 2^N = -\varepsilon. \end{aligned}$$

Vale allora (1.4) e quindi f è continua in $x = 0$.

Step 3: Resta da dimostrare che f è localmente lipschitziana nell'interno del dominio di f. Sia $x \in int\, dom(f)$, allora, per continuità, esistono $\alpha, \beta > 0$ tali che

$$\text{se } |y - x|_\infty \leq 2\beta, \text{ allora } |f(y)| \leq \alpha < \infty. \tag{1.5}$$

Siano ora z e z_1 tali che

$$|z_1 - z|_\infty, |z_1 - x|_\infty \leq \beta, \tag{1.6}$$

da cui, in particolare, $|z - x|_\infty \leq 2\beta$. Allora

$$|z_1 - z|_\infty, |z_1 - x|_\infty \leq \beta \Longrightarrow f(z) - f(z_1) \leq 2\alpha. \tag{1.7}$$

Sia $\varepsilon > 0$, allora, combinando (1.4) e (1.7), si ottiene

$$|z_1 - z|_\infty, |z_1 - x|_\infty \leq \frac{\beta\varepsilon}{2\alpha N 2^N} \Longrightarrow |f(z) - f(z_1)| \leq \varepsilon. \tag{1.8}$$

Scegliendo

$$\varepsilon = \frac{2\alpha N 2^N}{\beta} |z_1 - z|_\infty$$

si ha, da (1.6) e (1.8), che

$$|z_1 - z|_\infty, |z_1 - x|_\infty \leq \beta \Longrightarrow |f(z) - f(z_1)| \leq \frac{2\alpha N 2^N}{\beta} |z_1 - z|_\infty. \tag{1.9}$$

Sia ora z_2 tale che $|z_2 - x|_\infty \leq \beta$ e sia $[z_1, z_2]$ il segmento di $\mathbb{R}^N$ di estremi z_1, z_2. Siano

$$u_1, ..., u_M \in [z_1, z_2]$$

tali che

$$u_1 = z_1, u_2, ..., u_M = z_2$$

e

$$|u_m - u_{m+1}|_\infty \leq \beta$$

per ogni $m = 1, ..., M-1$. Si osservi che, poiché $|z_1 - x|_\infty, |z_2 - x|_\infty \leq \beta$,

$$|u_m - x|_\infty \leq \beta$$

per ogni $m = 1, ..., M$. Usando (1.9), si ottiene, per ogni $m = 1, ..., M-1$,

$$|u_m - u_{m+1}|_\infty \leq \beta \Longrightarrow |f(u_m) - f(u_{m+1})| \leq \frac{2\alpha N 2^N}{\beta} |u_m - u_{m+1}|_\infty .$$

Sommando le disuguaglianze, infine,

$$|z_1 - x|_\infty, |z_2 - x|_\infty \leq \beta \Longrightarrow |f(z_1) - f(z_2)| \leq \frac{2\alpha N 2^N}{\beta} |z_1 - z_2|_\infty$$

e quindi la tesi. □

1.2 Funzioni convesse

Definizione 1.7. Oltre alla definizione di funzione convessa, già vista all'inizio del capitolo, abbiamo che:

i) una funzione $f \colon \mathbb{R}^{m\times n} \to \overline{\mathbb{R}}$ è detta policonvessa se esiste $g \colon \mathbb{R}^{\tau(m,n)} \to \overline{\mathbb{R}}$ convessa, tale che
$$f(A) = g\left(T(A)\right)$$
dove $T \colon \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{\tau(m,n)}$ è definita da
$$T(A) = (A, adj_2 A, ..., adj_{m\wedge n} A)$$
e $adj_s A$ indica la matrice di tutti i sotto-determinanti di ordine $s \times s$ della matrice A, $1 \leq s \leq m \wedge n = \min\{m, n\}$, e
$$\tau(m,n) = \sum_{s=1}^{m\wedge n} \binom{m}{s}\binom{n}{s};$$

ii) una funzione misurabile e localmente limitata $f\colon \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ è detta quasi-convessa se

$$f(A) \leq \frac{1}{m(\Omega)} \int\limits_{\Omega} f\left(A + D\psi(x)\right) dx$$

per ogni dominio limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ogni $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e ogni $\psi \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$;

iii) una funzione $f\colon \mathbb{R}^{m\times n} \to \overline{\mathbb{R}}$ è detta convessa di rango 1 se

$$f\left(tA + (1-t)B\right) \leq tf(A) + (1-t)f(B)$$

per ogni $t \in [0,1]$ e ogni $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, con $rg\{A - B\} = 1$;

iv) una funzione $f\colon \mathbb{R}^{m\times n} \to \overline{R}$ è detta separatamente convessa se

$$f\left(tA + (1-t)B\right) \leq tf(A) + (1-t)f(B)$$

per ogni $t \in [0,1]$ e ogni $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con $A - B = se_{ij}$, per $s \in \mathbb{R}$ e $i, j = 1, ..., N$, dove e_{ij} è la matrice che ha 1 nel posto ij e 0 altrove.

Il seguente teorema, la cui dimostrazione può essere trovata in [3], è fondamentale per trattare funzioni che godono delle proprietà appena definite.

Teorema 1.8. *i) Sia $f\colon \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$, allora*

$$f \text{ convessa} \Longrightarrow f \text{ policonvessa} \Longrightarrow f \text{ quasi-convessa} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f \text{ convessa di rango 1} \Longrightarrow f \text{ separatamente convessa};$$

ii) sia $f\colon \mathbb{R}^{m\times n} \to \overline{\mathbb{R}}$, allora

$$f \text{ convessa} \Longrightarrow f \text{ policonvessa} \Longrightarrow f \text{ convessa di rango 1};$$

iii) se $m = 1$ oppure $n = 1$, allora tutte le definizioni sono equivalenti;

Osservazione 1.9. *In virtù dei teoremi 1.6 e 1.8, possiamo affermare che se una funzione gode di una qualunque delle tipologie di convessità, allora questa è localmente lipschitziana.*

Prima di definire i vari tipi di inviluppi, vediamo il seguente lemma, il quale garantisce che l'inviluppo convesso di una funzione convessa sia ancora una funzione convessa.

Lemma 1.10. *La funzione*

$$Cf = \sup\{g \le f:\ g \text{ convessa}\}$$

è convessa.

Dimostrazione. Siano $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e sia $t \in (0,1)$. Se $f\left((1-t)A + tB\right) < +\infty$, allora per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $g \le f$ convessa tale che

$$\begin{aligned} f\left((1-t)A+tB\right) &< g\left((1-t)A+tB\right) + \varepsilon \le \\ &\le (1-t)g\left(A\right) + tg\left(B\right) + \varepsilon \le (1-t)f\left(A\right) + tf\left(B\right) + \varepsilon \end{aligned}$$

e quindi si conclude per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$.

Se $f\left((1-t)A+tB\right) = +\infty$, allora per ogni n, esiste $g \le f$ convessa tale che

$$n < g\left((1-t)A+tB\right) \le (1-t)g\left(A\right) + tg\left(B\right)$$

e quindi anche $(1-t)g\left(A\right) + tg\left(B\right) = +\infty$. □

Possiamo ora procedere col definire i vari inviluppi per funzioni.

Definizione 1.11. Le funzioni

$$\begin{aligned} Cf &= \sup\{g \le f:\ g \text{ convessa}\} \\ Pf &= \sup\{g \le f:\ g \text{ policonvessa}\} \\ Qf &= \sup\{g \le f:\ g \text{ quasi-convessa}\} \\ Rf &= \sup\{g \le f:\ g \text{ convessa di rango } 1\} \end{aligned}$$

sono, rispettivamente, l'inviluppo convesso, policonvesso, quasi-convesso e convesso di rango 1 di f.

Osservazione 1.12. *Si osservi intanto che, per il lemma 1.10, l'inviluppo convesso di f è una funzione convessa. Nello stesso modo, si può dimostrare che vale un risultato analogo per gli altri inviluppi. Per il teorema 1.8, si ha inoltre che*

$$Cf \le Pf \le Qf \le Rf \le f.$$

Soffermiamoci ora su una caratterizzazione dell'inviluppo convesso di rango 1. Grazie al prossimo teorema, nel teorema 1.18 daremo una caratterizzazione ricorsiva anche all'inviluppo convesso di rango 1 di un insieme

Teorema 1.13. *Sia* $f\colon \mathbb{R}^{m\times n} \to \overline{\mathbb{R}}$ *e poniamo* $R_0 f = f$ *e, per ogni* $k \in \mathbb{N}$,

$$R_{k+1}f\,(\xi) = \inf\Big\{tR_k f\,(\xi_1) + (1-t)R_k f\,(\xi_2) : \\ t \in [0,1],\ \xi = t\xi_1 + (1-t)\xi_2,\ rg\,(\xi_1 - \xi_2) = 1\Big\}.$$

Allora

$$Rf = \lim_{k\to\infty} R_k f = \inf_{k\in\mathbb{N}} R_k f.$$

Dimostrazione. Poiché $g \leq R_{k+1}f \leq R_k f$, sono ben definiti

$$R'f = \lim_{k\to\infty} R_k f = \inf_{k\in\mathbb{N}} R_k f.$$

Si osservi che se f è convessa di rango 1, allora $R'f = f$. Questo implica che $R'\,(Rf) = Rf$, da cui

$$Rf = R'\,(Rf) \leq R'f \leq f.$$

Se ora dimostriamo che $R'f$ è convessa di rango 1, allora, poiché Rf è l'estremo superiore delle funzioni convesse di rango 1 minori o uguali a f, si ha che $R'f = Rf$. Va dimostrato che per ogni $t \in [0,1]$ e per ogni $\xi, \eta \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con $rg\,\{\xi - \eta\} = 1$, si ha

$$tR'f\,(\xi) + (1-t)R'f\,(\eta) \geq R'f\,(t\xi + (1-t)\eta)\,.$$

Per definizione di estremo inferiore, per ogni $\varepsilon > 0$, esistono $i \leq j \in \mathbb{N}$ tali che

$$R'f\,(\xi) \geq -\varepsilon + R_i f\,(\xi) \geq -\varepsilon + R_j f\,(\xi)\,,$$
$$R'f\,(\eta) \geq -\varepsilon + R_j f\,(\eta)\,.$$

Si ottiene allora

$$tR'f\,(\xi) + (1-t)R'f\,(\eta) \geq -\varepsilon + tR_j f\,(\xi) + (1-t)R_j f\,(\eta) \geq \\ \geq -\varepsilon + R_{j+1} f\,(t\xi + (1-t)\eta) \geq -\varepsilon + R'f\,(t\xi + (1-t)\eta)$$

La tesi segue per l'arbitrarietà di ε. □

Nel teorema 1.18 si troverà una formula analoga per l'inviluppo convesso di rango 1 di un insieme.

1.3 Insiemi convessi

In modo analogo a quanto fatto per le funzioni, si possono dare le varie definizioni di convessità per gli insiemi.

Definizione 1.14. Oltre alla definizione di insieme convesso, abbiamo che:

i) un insieme $K \subset \mathbb{R}^{m\times n}$ è detto policonvesso se per ogni $t_i \geq 0$ con $\sum_{i=1}^{\tau(m,n)} t_i = 1$ e ogni $A_i \in K$, tali che

$$\sum_{i=1}^{\tau(m,n)} t_i T\left(A_i\right) = T\left(\sum_{i=1}^{\tau(m,n)} t_i A_i\right),$$

allora

$$\sum_{i=1}^{\tau(m,n)} t_i A_i \in K$$

dove T è la funzione introdotta nella definizione 1.7;

ii) un insieme $K \subset \mathbb{R}^{m\times n}$ è detto convesso di rango 1 se per ogni $t \in [0,1]$ e ogni $A, B \in K$, tali che $rg\left\{A - B\right\} \leq 1$, allora

$$tA + (1-t)B \in K;$$

iii) un insieme $K \subset \mathbb{R}^N$ è detto separatamente convesso se per ogni $t \in [0,1]$ e ogni $A, B \in K$, tali che $A - B = se_i$, per ogni $i = 1, ..., N$, con e_i l'i-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^N$, e $s \in \mathbb{R}$, allora

$$tA + (1-t)B \in K.$$

Osservazione 1.15. *È immediato verificare che valgono le seguenti implicazioni:*

$$K \text{ convesso} \Longrightarrow K \text{ policonvesso} \Longrightarrow K \text{ convesso di rango 1.}$$

Seguendo l'idea della sezione 1.1 e della proposizione 1.4 definiamo i vari inviluppi convessi per insiemi.

Definizione 1.16. Sia $E \subset \mathbb{R}^{m\times n}$, o $E \subset \mathbb{R}^N$ nel caso degli inviluppi convesso, separatamente convesso e per la chiusura dell'inviluppo quasi-convesso. Si definiscono:

$$
\begin{aligned}
&coE = \left\{\xi \in \mathbb{R}^N \colon\ f(\xi) \le 0,\ \forall f \colon \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}, f\big|_E = 0,\ f \text{ convessa}\right\};\\
&PcoE = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{m\times n} \colon\ f(\xi) \le 0,\ \forall f \colon \mathbb{R}^{m\times n} \to \overline{\mathbb{R}}, f\big|_E = 0,\ f \text{ policonvessa}\right\};\\
&RcoE = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{m\times n} \colon\ f(\xi) \le 0,\ \forall f \colon \mathbb{R}^{m\times n} \to \overline{\mathbb{R}}, f\big|_E = 0,\ f \text{ convessa di rango } 1\right\};\\
&\overline{QcoE} = \left\{\xi \in \mathbb{R}^N \colon\ f(\xi) \le 0,\ \forall f \colon \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}, f\big|_E = 0,\ f \text{ quasi-convessa}\right\};\\
&ScoE = \left\{\xi \in \mathbb{R}^N \colon\ f(\xi) \le 0,\ \forall f \colon \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}, f\big|_E = 0,\ f \text{ separatamente convessa}\right\}.
\end{aligned}
$$

Osservazione 1.17. *Si può dimostrare che tali insiemi corrispondono ai più piccoli insiemi convesso, policonvesso, quasi-convesso, convesso di rango 1 e separatamente convesso che contengono E. Inoltre, dal teorema 1.8 segue che*

$$E \subset RcoE \subset PcoE \subset coE.$$

Concludiamo questa sezione con un'utile caratterizzazione ricorsiva dell'inviluppo convesso di rango 1 di un insieme E presente in [4].

Teorema 1.18. *Siano $E \subset \mathbb{R}^{m\times n}$, $R_0coE = E$ e*

$$
\begin{aligned}
R_{i+1}coE = \Big\{\xi \in \mathbb{R}^{m\times n} \colon\ \xi = tA + (1-t)B,\ t \in [0,1],\ A, B \in R_i coE,\\
rg\,\{A - B\} = 1\Big\}.
\end{aligned}
$$

Allora,

$$RcoE = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} R_i coE.$$

Dimostrazione. Induttivamente, si osserva che $R_i coE \subset RcoE$ e quindi

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} R_i coE \subset RcoE.$$

Per dimostrare l'inclusione opposta, prendiamo una funzione $f \colon \mathbb{R}^{m\times n} \to \overline{\mathbb{R}}$. Si definiscono ricorsivamente gli insiemi

$$
\begin{aligned}
R_{i+1}f(\xi) = \inf\{tR_i f(A) + (1-t)R_i f(B) \colon\ t \in [0,1],\ \xi = tA + (1-t)B,\\
rg\,\{A - B\} = 1\},
\end{aligned}
$$

con $R_0 f = f$. Per il teorema 1.13, $Rf(\xi) = \inf_{i \in \mathbb{N}} R_i f(\xi)$. Poiché l'estremo inferiore coincide con il limite, Rf è la funzione convessa di rango 1 massimale tra quelle minori o uguali a f.

Si applica questo risultato alla funzione indicatrice $f = \chi_E$. Per induzione, $R_i \chi_E = \chi_{R_i coE}$ e quindi $R\chi_E = \chi_{\cup R_i coE}$. Poiché $R\chi_E$ è una funzione convessa di rango 1 e $R\chi_E\big|_E = 0$, si deduce che se $\xi \in RcoE$, allora $R\chi_E(\xi) = 0$ e quindi $\xi \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} R_i coE$, cioè la tesi. □

1.4 Alcune proprietà degli inviluppi convessi

In questa sezione daremo delle definizioni generali che applicheremo direttamente al caso in cui $E = O(m,n)$ e $K = coE$. Iniziamo con una proprietà degli insiemi convessi di rango 1. Prese due matrici $\xi, \eta \in \mathbb{R}^{m \times n}$, l'intervallo (ξ, η) è costituito dai punti $(1-t)\xi + t\eta$ per $t \in (0,1)$. Inoltre, un segmento (ξ_1, η_1) è parallelo a (ξ, η) se esiste $0 \neq s \in \mathbb{R}$ tale che $\xi_1 - \eta_1 = s(\xi - \eta)$.

Definizione 1.19. Si dice che un insieme $K \subset \mathbb{R}^{m \times n}$ convesso di rango 1 soddisfa la proprietà del segmento se per ogni $\xi, \eta \in K$, con $rg\{\xi - \eta\} = 1$ e $(\xi, \eta) \cap intK \neq \emptyset$, esistono due successioni $\xi_\nu, \eta_\nu \in (\xi, \eta) \cap intK$, con $\xi_\nu \to \xi$ e $\eta_\nu \to \eta$.

Osservazione 1.20. *Si osservi che se un insieme K è convesso, allora è convesso di rango 1 e gode della proprietà del segmento. Supponiamo che l'intervallo (ξ, η) intersechi l'interno di K e sia $\zeta \in (\xi, \eta) \cap intK$. Allora esiste $\rho > 0$ tale che la palla di centro ζ e raggio ρ, $B_\rho(\zeta)$, sia contenuta in K. Poiché K è convesso, il cono di base $B_\rho(\zeta)$ e vertice in ξ è contenuto in K. Inoltre, al suo interno giace il punto $\xi_\nu = \left(1 - \frac{1}{\nu}\right)\xi + \frac{1}{\nu}\eta$, che appartiene all'interno di K e converge a ξ. Procedendo in modo analogo per η, si dimostra che vale lo stesso anche per η e che quindi un insieme convesso gode della proprietà del segmento.*

Nel caso in cui l'insieme K coincida con l'inviluppo convesso di rango 1 di un altro insieme E, si può definire la seguente proprietà, detta di approssimazione.

Definizione 1.21. Si dice che un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^{m \times n}$ possiede la proprietà di approssimazione se per ogni $\delta > 0$ esiste un insieme chiuso E_δ tale che:

i) $RcoE_\delta \Subset intRcoE$;

ii) per ogni $\eta \in E_\delta$ vale che $dist\,(\eta, E) \leq \delta$;

iii) se $\eta \in intRcoE$, allora $\eta \in RcoE_\delta$ per ogni $\delta > 0$ sufficientemente piccolo.

Diamo innanzitutto un esempio di un insieme che non soddisfi la proprietà di approssimazione. Denotiamo con $\mathbb{R}^{2\times 2}_d$ l'insieme delle matrici diagonali 2×2 e scriviamo ogni matrice di questo tipo come un vettore di $\mathbb{R}^2$.

Esempio 1.22. Sia $E = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6\} \subset \mathcal{M} = \mathbb{R}^{2\times 2}_d$ definito da

$$\xi_1 = (1,0), \xi_2 = (1,-1), \xi_3 = (0,-1), \xi_4 = (-1,0), \xi_5 = (-1,1), \xi_6 = (0,1).$$

Risulta allora

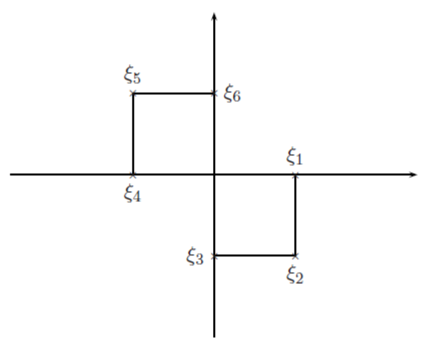

Figura 1.1: L'insieme definito nell'esempio 1.22.

$$RcoE = \{\xi \in \mathcal{M}\colon\ \xi = (x,y) \in [0,1] \times [-1,0] \cup [-1,0] \times [0,1]\}$$

e il suo interno, relativo ad $\mathcal{M}$, è

$$intRcoE = \{\xi \in \mathcal{M}\colon\ \xi = (x,y) \in (0,1) \times (-1,0) \cup (-1,0) \times (0,1)\}$$

e non c'è speranza di trovare un insieme E_δ che soddisfi la proprietà di approssimazione. Se infatti dovesse valere la condizione iii) della proprietà di approssimazione per un punto η vicino all'origine, allora verrebbe automaticamente violata la condizione ii). Quel punto vicino all'origine non può essere arbitrariamente vicino all'insieme E.

Questo esempio può essere generalizzato al caso di matrici non diagonali. Se definiamo

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \; a, b, c, d \in \{\pm 1, 0\}, \text{ non tutti nulli e con lo stesso segno} \right\},$$

allora vediamo, con lo stesso ragionamento fatto in precedenza, che E non soddisfa la proprietà di approssimazione.

Una condizione sufficiente per avere la proprietà di approssimazione è quella di avere la proprietà del segmento, con $K = RcoE$. Nel capitolo 3 vedremo che, se $E = O(m,n)$ e $K = coE$, allora $coE = RcoE$, per cui K gode della proprietà del segmento e, per il seguente lemma 1.23, soddisfa la proprietà di approssimazione. Nel capitolo 4 utilizzeremo la proprietà di approssimazione anche nel caso scalare osservando che l'insieme $E = \{-1, 1\}$ soddisfa banalmente la proprietà definendo $E_\delta = [-1+\delta, 1-\delta]$ per ogni $\delta > 0$.

Lemma 1.23. *Se $RcoE \subset \mathbb{R}^{m\times n}$ possiede la proprietà del segmento, allora E gode della proprietà di approssimazione.*

Dimostrazione. Sia $\xi \in intRcoE \subset RcoE$. Per il teorema 1.18,

$$RcoE = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} R_i coE$$

e quindi esiste $i \in \mathbb{N}$ tale che $\xi \in R_i coE$. Per semplicità, si può supporre $i = 2$. Per gli altri casi si dovrà iterare la dimostrazione nel caso $i = 2$.

Step 1: Poiché $\xi \in R_2 coE$, esistono A_1, $A_2 \in R_1 coE$ tali che $rg\,\{A_1 - A_2\} = 1$ e λ_1, $\lambda_2 \geq 0$, tali che $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ e

$$\xi = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2.$$

Per la supposta proprietà del segmento, esiste $(A_1^\varepsilon, A_2^\varepsilon)$ tale che $\xi \subset (A_1^\varepsilon, A_2^\varepsilon) \subset (A_1, A_2) \cap intRcoE$ e

$$\xi = \lambda_1^\varepsilon A_1^\varepsilon + \lambda_2^\varepsilon A_2^\varepsilon,$$

con $\lambda_i^\varepsilon \geq 0$, $\lambda_1^\varepsilon + \lambda_2^\varepsilon = 1$ e $A_i^\varepsilon \to A_i$.

Step 2: Poiché A_1, $A_2 \in R_1 coE$, esistono $A_{ij} \in E$ con $rg\,\{A_{i1} - A_{i2}\} = 1$, con $i, j \in \{12\}$, tali che

$$A_1 = \lambda_{11} A_{11} + \lambda_{12} A_{12},$$

$$A_2 = \lambda_{21} A_{21} + \lambda_{22} A_{22}.$$

Per la proprietà del segmento, esistono due segmenti $(A_{i1}^{\varepsilon}, A_{i2}^{\varepsilon})$, con $A_i^{\varepsilon} \in (A_{i1}, A_{i2}) \cap intRcoE$, $rg\left\{A_{i1}^{\varepsilon} - A_{i2}^{\varepsilon}\right\}$ e

$$A_i^{\varepsilon} = \lambda_{i1}^{\varepsilon} A_{i1} + \lambda_{i2}^{\varepsilon}.$$

Se consideriamo

$$E_{\delta} = \left\{A_{11}^{\varepsilon}, A_{12}^{\varepsilon}, A_{21}^{\varepsilon}, A_{22}^{\varepsilon}\right\},$$

allora $E_{\delta} \subset intRcoE$, $\xi \in R_2 coE_{\delta} \subset RcoE_{\delta}$ e $dist\left(A_{ij}^{\varepsilon}, E\right) < \delta$ per ε sufficientemente piccolo e quindi E gode della proprietà del segmento. $\square$

Capitolo 2

Un teorema di semicontinuità

In questo capitolo vediamo un teorema di semicontinuità debole per il funzionale integrale $F\colon W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ con Ω aperto limitato, definito da

$$F(u) = \int_\Omega f\left(Du(x)\right)\, dx. \tag{2.1}$$

Teorema 2.1. *Siano $f\colon \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e quasi-convessa e Ω un sottoinsieme aperto e limitato di $\mathbb{R}^n$. Sia F il funzionale integrale definito in* (2.1)*, allora F è sequenzialmente semicontinuo inferiormente nella topologia $* - W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$, cioè per ogni successione $\{u_j\} \subseteq W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ tale che $u_j \to u$ in *-$W^{1,\infty}$, risulta che*

$$\liminf_{j\to\infty} F(u_j) \geq F(u).$$

Nel capitolo 4 utilizzeremo il teorema 2.1 nel caso in cui f sia una funzione convessa. Per la sua maggiore generalità, si è preferito dimostrare la semicontinuità nel caso in cui f sia una funzione quasi-convessa. Prima di procedere con la dimostrazione, ricordiamo la definizione di convergenza debole-* e un classico teorema di analisi sulla suddivisione di un aperto di $\mathbb{R}^n$. Per una dimostrazione del teorema 2.3, si veda [7].

Definizione 2.2. Una successione $u_j \in L^\infty(\Omega)$ converge debolmente nella topologia *-L^∞ a u, in breve $u_j \to u$ in *-L^∞, se per ogni $v \in L^1(\Omega)$ si ha che

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega u_j v\, dx = \int_\Omega uv\, dx.$$

Inoltre, si dice che $u_j \to u$ in $*$-$W^{1,\infty}$ se $u_j \to u$ e $Du_j \to Du$ in $*$-L^∞.

Teorema 2.3. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, allora esiste una famiglia di cubi $\{Q_k^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ a due a due privi di punti interni in comune, di lato minore o uguale a $\frac{1}{k}$ tali che mis $\left(\Omega - \bigcup_{i\in\mathbb{N}} Q_k^i\right) = 0$.*

La dimostrazione del teorema 2.1 si fonda inoltre sul seguente lemma.

Lemma 2.4. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato, $p \in [1,\infty)$ e $v \in L^p(\Omega)$. Sia $\{Q_k^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una famiglia di cubi che ricopra Ω data dal teorema 2.3. Sia $[v]_m$ la media di v su Ω rispetto al ricoprimento costituito dai Q_k^i, cioè*

$$[v]_m(x) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \left(⨍_{Q_k^i} v(y)\, dy \right) \chi_{Q_k^i}(x). \tag{2.2}$$

Allora

$$[v]_m \in L^p(\Omega) \ \ e \ \ [v]_m \rightharpoonup v \ in \ L^p(\Omega), \ per \ k \to \infty.$$

Dimostrazione. Sia $v \in L^p(\Omega)$. Sia $[v]_m$ la sua media, definita in (2.2). Per non appesantire troppo la scrittura, tralasciamo l'insieme di integrazione Q_k^i nelle medie integrali. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione $v_\varepsilon \in C_c^0(\Omega)$ tale che $\|v - v_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon$. Allora, usando la disuguaglianza di Jensen e il fatto che *mis* $\left(\Omega - \bigcup_{i\in\mathbb{N}} Q_k^i\right) = 0$, si ottiene

$$\begin{aligned}
\|[v_\varepsilon]_m - [v]_m\|^p_{L^p(\Omega)} &= \int_\Omega |[v_\varepsilon]_m - [v]_m|^p\, dx = \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} \left| ⨍ v_\varepsilon\, dy - ⨍ v\, dy \right|^p \cdot mis\left(Q_k^i\right) = \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} \left| ⨍ (v_\varepsilon - v)\, dy \right|^p \cdot mis\left(Q_k^i\right) \leq \\
&\leq \sum_{i\in\mathbb{N}} ⨍ |v_\varepsilon(y) - v(y)|^p\ dy \cdot mis\left(Q_k^i\right) \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} \int_{Q_k^i} |v_\varepsilon(y) - v(y)|^p\ dy = \|v_\varepsilon - v\|^p_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Possiamo affermare che se la tesi vale per la funzione v_ε, allora vale anche per v. Infatti:

$$\begin{aligned}\|v-[v]_m\|_{L^p(\Omega)} &\leq \|v-v_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} + \|v_\varepsilon-[v_\varepsilon]_m\|_{L^p(\Omega)} + \|[v_\varepsilon]_m-[v]_m\|_{L^p(\Omega)} \leq \\ &\leq \|v-v_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} + \|v_\varepsilon-[v_\varepsilon]_m\|_{L^p(\Omega)} + \|v_\varepsilon-v\|_{L^p(\Omega)}.\end{aligned}$$

Se $v \in C_c^0(\Omega)$, in particolare v è uniformemente continua. Quindi, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$\sup_{|x-y|<\delta} |v(x)-v(y)| < \varepsilon.$$

A meno di scegliere la diagonale del cubo Q_k^i più piccola di δ, ovvero $\frac{\sqrt{n}}{k} < \delta$, ogni coppia di punti del cubo soddisfa la disuguaglianza di uniforme continuità e quindi

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} \sup_{x,y\in Q_k^i} |v(x)-v(y)| < \varepsilon,$$

dunque, ancora per la disuguaglianza di Jensen,

$$\begin{aligned}\|v-[v]_m\|^p_{L^p(\Omega)} &= \int_\Omega |v-[v]_m|^p \, dx = \sum_{i\in\mathbb{N}} \int_{Q_k^i} \left| v(x) - \fint v(y)\,dy \right|^p dx = \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \int_{Q_k^i} \left| \fint v(x)-v(y) \right|^p dx \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \int_{Q_k^i} \left(\fint |v(x)-v(y)|^p \, dy \right) dx \leq \\ &\leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \int_{Q_k^i} \left(\fint \varepsilon^p \, dy \right) dx = \int_\Omega \varepsilon^p \, dx = mis\,(\Omega)\,\varepsilon^p.\end{aligned}$$

Concludendo, per ogni $m \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{\sqrt{n}}{k} < \delta$, si ha che

$$\|v-[v]_m\|_{L^p(\Omega)} \leq mis\,(\Omega)^{\frac{1}{p}}\,\varepsilon$$

e quindi la tesi. □

Possiamo adesso dimostrare il teorema 2.1.

Dimostrazione del Teorema 2.1. Siano u_j e u come nelle ipotesi del teorema. A meno di estrarre una sottosuccessione convergente, si può supporre che

$\liminf_{j\to\infty} F(u_j) = \lim_{j\to\infty} F(u_j)$. Poiché poi u_j è limitata in L^∞, ovvero equi-limitate, e poiché Du_j è equi-limitata in C^∞, ovvero u_j equi-continue, allora, a meno di applicare il teorema di Ascoli-Arzelà, si può supporre che $u_j \to u$ in L^∞ e che $Du_j \to Du$ in *-L^∞. Suddividiamo la dimostrazione in due parti: nella prima dimostriamo il teorema nel caso in cui u sia una funzione affine, cioè $u(x) = Ax + b$, con $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $b \in \mathbb{R}^n$; nella seconda dimostriamo il teorema nel caso generale utilizzando il lemma 2.4.

Step 1: Sia $u = Ax + b$. Si osservi che se $u_j \in u + W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$, allora, per quasi-convessità,

$$\begin{aligned} F(u_j) &= \int_\Omega f(Du_j)\, dx = \int_\Omega f(D(u_j - u) + Du)\, dx \geq \\ &\geq mis(\Omega)\, f(A) = F(u) \end{aligned}$$

e quindi $F(u_j) \geq F(u)$ per ogni $j \in \mathbb{N}$, da cui, in particolare $\lim_{j\to\infty} F(u_j) \geq F(u)$. Si cerca quindi di approssimare u_j in modo che assuma lo stesso dato al bordo di u. Sia allora $\Omega_0 \Subset \Omega$ e sia $d = dist(\Omega_0, \partial\Omega) > 0$. Siano inoltre $M \in \mathbb{N}$ e $\tilde{\Omega}_i = \left\{x \in \Omega\colon\ dist(x, \Omega_0) < \frac{i}{M}\frac{d}{2}\right\}$ per ogni $i = 1, ..., M$.

Definiamo delle funzioni "cut-off " $\varphi_i \in C_c^\infty\left(\tilde{\Omega}_i\right)$ tali che

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi_i \leq 1, \\ \varphi_i\big|_{\tilde{\Omega}_{i-1}} = 1, \\ \|D\varphi_i\|_{L^\infty} \leq 4\frac{M}{d}. \end{cases}$$

Se definiamo

$$u_j^i = \varphi_i u_j + (1 - \varphi_i)\, u,$$

allora $u_j^i \in u + W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ e

$$Du_j^i = \begin{cases} Du & \text{su } \Omega - \tilde{\Omega}_i; \\ \varphi_i Du_j + (1-\varphi_i)\, Du + (u_j - u) \otimes D\varphi_i & \text{su } \tilde{\Omega}_i - \tilde{\Omega}_{i-1}; \\ Du_j & \text{su } \tilde{\Omega}_{i-1}. \end{cases}$$

Consideriamo separatamente i tre integrali che danno $F\left(u_j^i\right)$:

1)

$$\left| \int_{\Omega - \tilde{\Omega}_i} f(Du)\, dx \right| = |f(A)|\, mis\left(\Omega - \tilde{\Omega}_i\right)$$

2)
$$\int_{\tilde{\Omega}_{i-1}} f\left(Du_j\right)\,dx = \int_{\Omega} f\left(Du_j\right)\,dx - \int_{\Omega-\tilde{\Omega}_{i-1}} f\left(Du_j\right)\,dx =$$
$$= F(u_j) - \int_{\Omega-\tilde{\Omega}_{i-1}} f(Du_j)\,dx$$

da cui si ottiene

$$\left|\int_{\tilde{\Omega}_{i-1}} \left(f(Du_j) - F(u_j)\right)\,dx\right| \leq \sup_{\overline{B}_L(0)} |f| mis\left(\Omega - \Omega_0\right),$$

dove $L = \sup\limits_{j\in\mathbb{N}} \|Du_j\|_{L^\infty} < \infty$, dato che $Du_j \to w$ in *-L^∞.

3)
$$\begin{aligned}\left\|Du_j^i\right\|_{L^\infty} &\leq \|\varphi_i Du_j + (1-\varphi_i)\,Du\|_{L^\infty} + \|(u_j - u)\otimes D\varphi_i\|_{L^\infty} \leq \\ &\leq \|Du_j\|_{L^\infty} + \|Du\|_{L^\infty} + \||u_j - u|\,|D\varphi_i|\|_{L^\infty} \leq \\ &\leq L + |A| + \frac{4M}{d}\|u_j - u\|_{L^\infty} \leq L + |A| + \frac{4M}{d}\tilde{L} := L_M.\end{aligned}$$

Risulta allora che

$$\left|\int_{\tilde{\Omega}_i-\tilde{\Omega}_{i-1}} f\left(Du_j^i\right)\,dx\right| \leq mis\left(\tilde{\Omega}_i - \tilde{\Omega}_{i-1}\right) \sup_{\overline{B}_{L_M}(0)} |f|$$

e quindi, riassumendo

$$F(u_j^i) \leq \left(f(A) + \sup_{\overline{B}_L(0)} |f|\right) mis\left(\Omega - \Omega_0\right) + F(u_j) + mis\left(\tilde{\Omega}_i - \tilde{\Omega}_{i-1}\right) \sup_{\overline{B}_{L_M}(0)} |f|.$$

Se adesso sommiamo e facciamo la media, al variare di i, abbiamo che

$$\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} F\left(u_j^i\right) \leq \left(|f(A)| + \sup_{\overline{B}_L(0)} |f|\right) mis\left(\Omega - \Omega_0\right) + F(u_j) + \frac{1}{M}\sup_{\overline{B}_{L_M}(0)} |f| mis\left(\Omega - \Omega_0\right).$$

Poiché si sta facendo la media, per ogni j, esiste $i_j \in \{1,...,M\}$ tale che

$$F\left(u_j^{i_j}\right) \leq \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} F\left(u_j^i\right),$$

quindi

$$F\left(u_j^{i_j}\right) \leq F\left(u_j\right) + \left(|f(A)| + \sup_{\overline{B}_L(0)} |f| + \frac{1}{M}\sup_{\overline{B}_{L_M}(0)} |f|\right) mis\left(\Omega - \Omega_0\right).$$

Si definisce $w_j = u_j^{i_j} \in u + W_0^{1,\infty}\left(\Omega, \mathbb{R}^m\right)$, allora, per quanto visto in 3), si ha

$$\|w_j - u\|_{L^\infty} = \left\|\varphi_{i_j} u_j - \varphi_{i_j} u\right\|_{L^\infty} \leq \|u_j - u\|_{L^\infty} \to 0,$$

cioè $w_j \to u$ in L^∞ e inoltre, a meno di estrarre una sottosuccessione, $Dw_j \to Du$ in $*$-L^∞ perché $|Dw_j|$ è limitato.

Abbiamo quindi dimostrato che ogni sottosuccessione converge a u nella topologia $* - W^{1,\infty}$ e quindi $w_j \to u$ in $*$-$W^{1,\infty}$. Inoltre:

$$F\left(w_j\right) \leq F\left(u_j\right) + \left(|f(A)| + \sup_{\overline{B}_L(0)} |f| + \frac{1}{M}\sup_{\overline{B}_{L_M}(0)} |f|\right) mis\left(\Omega - \Omega_0\right)$$

e passando al $\liminf\limits_{j\to\infty}$,

$$\begin{aligned} F(u) &\leq \liminf_{j\to\infty} F(w_j) \leq \\ &\leq \lim_{j\to\infty} F(u_j) + \left(|f(A)| + \sup_{\overline{B}_L(0)} |f| + \frac{1}{M}\sup_{\overline{B}_{L_M}(0)} |f|\right) mis\left(\Omega - \Omega_0\right). \end{aligned}$$

Facendo tendere Ω_0 a Ω, si ottiene che $F(u) \leq \lim\limits_{j\to\infty} F(u_j)$.

Step 2: Nel caso generale, siano $\Omega = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} Q_k^i \cup E_k$, con $mis\left(E_k\right) = 0$ e ogni cubo Q_k^i di lato minore o uguale di $\frac{1}{k}$, e $Q_k = \Omega - E_k$. Allora

$$\begin{aligned} F(u_j) &= \int_\Omega f\left(Du_j\right)\, dx = \int_{Q_k} f\left(Du_j\right)\, dx + \int_{E_k} f\left(Du_j\right)\, dx = \\ &= \int_{Q_k} f(Du_j) - f\left(D(u_j - u) + [Du]_m\right)\, dx + \int_{Q_k} f\left(D(u_j - u) + [Du]_m\right)\, dx = \\ &= I_j^1 + I_j^2. \end{aligned}$$

Per i teoremi 1.8 e 1.6, indicando con $[f]_{C^{0,1}} = \sup_{A,B\in\mathbb{R}^{m\times n}} \frac{|f(A)-f(B)|}{A-B}$ la seminorma di Lipschitz di una funzione,

$$\left|I_j^1\right| \leq \int_{Q_k} |f(Du_j) - f\left(D(u_j-u) + [Du]_m\right)| \, dx \leq$$
$$\leq [f]_{C^{0,1}\left(\overline{B}_{L+2\|Du\|_{L^\infty}}\right)} \int_{Q_k} |Du - [Du]_m| \, dx = \omega_k \to 0,$$

se $k \to \infty$.

Per l'altro integrale, utilizzando quanto trovato nello Step 1,

$$\liminf_{j\to\infty} I_j^2 \geq \sum_{i\in\mathbb{N}} \liminf_{j\to\infty} \int_{Q_k^i} f\left(D(u_j-u) + [Du]_m\right) \geq \sum_{i\in\mathbb{N}} \int_{Q_k^i} f\left([Du]_m\right) \, dx =$$
$$= \int_{Q_k} f\left([Du]_m\right) \, dx \geq - \int_{Q_k} |f\left([Du]_m\right) - f\left(Du\right)| \, dx + \int_{Q_k} f\left(Du\right) \, dx \geq$$
$$\geq - [f]_{C^{0,1}\left(\overline{B}_{2\|Du\|_{L^\infty}}\right)} \int_{Q_k} |[Du]_m - Du| \, dx + F(u) = -\sigma_k + F(u),$$

con $\sigma_k \to 0$ se $k \to \infty$. Abbiamo quindi trovato che $F(u_j) = I_j^1 + I_j^2 \geq \omega_k + I_j^2$, da cui, passando al $\liminf$, si ottiene

$$\liminf_{j\to\infty} F(u_j) \geq \omega_k + \liminf_{j\to\infty} I_j^2 = \omega_k - \sigma_k + F(u) \to F(u),$$

se $m \to \infty$. Infine quindi

$$\liminf_{j\to\infty} F(u_j) \geq F(u).$$

$\square$

Capitolo 3

Matrici ortogonali e valori singolari

In questo capitolo diamo inizialmente la definizione di valore singolare di una matrice e ne studiamo alcune proprietà. Analizziamo poi le proprietà delle matrici ortogonali, caratterizzando queste ultime, e il loro inviluppo convesso, tramite i valori singolari. Faremo vedere che, nel caso particolare di $E = O(m, n)$, gli inviluppi convesso e convesso di rango 1 coincidono utilizzando la caratterizzazione ricorsiva trovata nel teorema 1.18. In questo caso si potranno allora usare entrambe le proprietà, del segmento e di approssimazione, introdotte nella sezione 1.3.

Definizione 3.1. Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matrice con m righe ed n colonne, allora:

i) A è detta ortogonale se $A^t A = I$ nel caso in cui $m \geq n$ e, analogamente, se $AA^t = I$ nel caso in cui $m \leq n$;

ii) la norma 2 di A è definita da $\|A\|_2 = \sqrt{\mathrm{tr}\,(A^t A)}$;

iii) la norma indotta di A è definita da $\|A\| = \sup\limits_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$, in cui le norme a secondo membro sono le norme euclidee di $\mathbb{R}^m$, a numeratore, e di $\mathbb{R}^n$, a denominatore.

Definizione 3.2. i) Se $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è una matrice simmetrica e definita positiva, allora si può definire la sua radice quadrata nel seguente modo. Intanto, per il teorema spettrale, B è diagonalizzabile, quindi esistono una matrice $D \in O(n)$ e numeri non negativi $0 \leq \mu_1(B), ..., \mu_n(B)$ tali che

$$D^{-1}BD = \begin{bmatrix} \mu_1(B) & & 0 \\ 0 & \ddots & \\ & & \mu_n(B) \end{bmatrix}.$$

Si ha allora

$$B = D \begin{bmatrix} \mu_1(B) & & 0 \\ 0 & \ddots & \\ & & \mu_n(B) \end{bmatrix} D^{-1}$$

e quindi si può definire

$$B^{\frac{1}{2}} = D \begin{bmatrix} \sqrt{\mu_1(B)} & & 0 \\ 0 & \ddots & \\ & & \sqrt{\mu_n(B)} \end{bmatrix} D^{-1},$$

per la quale si ottiene, come voluto, $B^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}} = B$.

ii) I valori singolari di $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sono gli autovalori, $\lambda_1(A), ..., \lambda_n(A)$, della matrice $(A^tA)^{\frac{1}{2}}$. Si può scrivere $0 \leq \lambda_1(A) \leq ... \leq \lambda_n(A)$.

Osservazione 3.3. *Nel caso di una matrice quadrata simmetrica, i valori singolari non sono altro che i valori assoluti degli autovalori.*

Vale la seguente decomposizione ai valori singolari.

Teorema 3.4. *Se $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e sia $l = \min\{m, n\}$, allora esistono matrici $U \in O(m)$, $V \in O(n)$ e una matrice diagonale $D = diag\,(\lambda_1(A), ..., \lambda_l(A)) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, con $0 \leq \lambda_1 \leq ... \leq \lambda_l$, tali che*

$$A = UDV.$$

Osservazione 3.5. *Una matrice è ortogonale se e solo se $l = \min(m, n)$ valori singolari sono uguali a 1 (gli altri sono necessariamente 0). Infatti, se $m \geq n$, allora poiché A^tA è l'identità di $\mathbb{R}^{n\times n}$, questa ha tutti autovalori uguali a 1. Viceversa, se $m \leq n$, allora $AA^t = I$. Per la decomposizione ai valori singolari del teorema 3.4, esistono $U \in O(m)$, $V \in O(n)$ e una matrice diagonale $\Delta \in \mathbb{R}^{m\times n}$, cioè $\Delta = (D\ 0)$ con $D \in \mathbb{R}^{m\times m}$ e 0 la matrice nulla di $\mathbb{R}^{(n-m)\times m}$, tali che $A = U\Delta V$. Poiché per ipotesi $AA^t = I$, si ha che*

$$I = U\Delta VV^t\Delta^tU^t = UD^2U^t = D^2UU^t = D^2$$

e quindi D risulta essere la matrice identità. Pertanto $\Delta = (I\ 0)$ e quindi A ha esattamente m valori singolari uguali a 1.

Si osservi ora che se $n \geq m$, allora almeno $n - m$ valori singolari sono sempre nulli, indipendentemente dal fatto che una matrice sia ortogonale. Infatti, per il teorema della dimensione

$$dim\,(ImA) + dim\,(\ker A) = n$$

e quindi $dim\,(\ker A) \geq n - m$. Inoltre, dato $v \in \ker A$, risulta che $A^t Av = 0 \cdot v$ e quindi $\ker A$ è un autospazio per $A^t A$ relativo a 0 di dimensione almeno $n - m$. Quindi almeno $n - m$ valori singolari sono sicuramente nulli.

Il dato al bordo φ del problema 1 è supposto tale che $D\varphi(x) \in E \cup intcoE$, con $E = O\,(m, n)$, e di seguito daremo varie caratterizzazioni sia di E, sia del suo inviluppo convesso coE.

Osservazione 3.6. *Sia $A \in E = O(m, n)$, allora $\|Ax\|^2 = (Ax)^t\,(Ax) = x^t A^t Ax = x^t x = \|x\|^2$, da cui si ricava che $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 1$. Risulta quindi $\|A\| = 1$ e*

$$E \subset \left\{A \in \mathbb{R}^{m\times n} \colon\ \|A\| = 1\right\}.$$

Si osservi che l'inclusione inversa è invece falsa, infatti la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ha norma indotta pari a 1, ma non è ortogonale.

La seguente proprietà mette in relazione la norma 2 di una matrice ortogonale e i suoi valori singolari.

Proposizione 3.7. *Sia $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, allora $\|A\|_2^2 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2(A)$.*

Dimostrazione. Si osservi che, date due matrici $H, K \in \mathbb{R}^{n\times n}$,

$$\mathrm{tr}\,(HK) = \mathrm{tr}\,(KH)$$

perché

$$\mathrm{tr}\,(HK) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} H_{ij}K_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} K_{ji}H_{ij} = \mathrm{tr}\,(KH)\,.$$

Si usa la decomposizione di A vista nel teorema 3.4. Sia $A = UDV$, allora

$$\begin{aligned}\|A\|_2^2 &= \operatorname{tr}\left(A^tA\right) = \operatorname{tr}\left(V^tD^tU^tUDV\right) = \operatorname{tr}\left(V^tD^tDV\right) = \\ &= \operatorname{tr}\left(V^tD^tDV\right) = \operatorname{tr}\left(VV^tD^tD\right) = \operatorname{tr}\left(D^tD\right) = \sum_{j=1}^n \lambda_j^2(A).\end{aligned}$$

□

3.1 Matrici ortogonali

Per quanto abbiamo appena visto, le matrici ortogonali sono quelle con $l = \min\{m, n\}$ valori singolari uguali a 1. In questa sezione determiniamo l'inviluppo convesso di tali matrici e, nella proposizione 3.9, dimostriamo che l'inviluppo convesso dell'insieme delle matrici ortogonali è costituito dalle matrici di norma indotta minore o uguale di 1. Prima, possiamo osservare la seguente proprietà.

Proposizione 3.8. *Sia $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

i) $\|A\| \leq 1$*;*

ii) $A^tA - I \leq 0$*, nel senso che la matrice* $A^tA - I$ *è semidefinita negativa.*

Dimostrazione. Il fatto che $A^tA - I$ sia semidefinita negativa significa che per ogni $v \in \mathbb{R}^n$, $\langle (A^tA - I)\, v, v\rangle \leq 0$, da cui $\langle A^tAv, v\rangle \leq \|v\|^2$. Pertanto:

$$\begin{aligned}1 &\geq \frac{1}{\|v\|^2}\left(A^tAv\right)^t v = \frac{1}{\|v\|^2} v^tA^tAv = \\ &= \frac{1}{\|v\|^2}\left(Av\right)^t Av = \frac{\|Av\|^2}{\|v\|^2}.\end{aligned}$$

Passando all'estremo superiore, si ottiene $\|A\| \leq 1$. Procedendo a ritroso, si dimostra l'implicazione inversa. □

Proposizione 3.9. *L'inviluppo convesso di $E = O(m, n)$ è*

$$K = coE = \left\{A \in \mathbb{R}^{m\times n} \colon\ \|A\| \leq 1\right\}.$$

Dimostrazione. Per dimostrare che $K \subseteq \{A \in \mathbb{R}^{m\times n} \colon \|A\| \leq 1\}$, basta dimostrare che l'insieme a secondo membro è convesso e questo deriva dalla disuguaglianza triangolare:

$$\begin{aligned}\|tA + (1-t)B\| &\leq |t|\,\|A\| + |1-t|\,\|B\| \leq \\ &\leq |t| + |1-t| = 1.\end{aligned}$$

Viceversa, sia $\|C\| \leq 1$. Si può decomporre C ai valori singolari e trovare $C = UDV$. Poiché $\|C\| \leq 1$, per la proposizione 3.8, $C^tC - I$ è una matrice semidefinita negativa che ha quindi tutti gli autovalori non positivi. Se β è un autovalore di C^tC, allora esiste v tale che $C^tCv = \beta v$, da cui $(C^tC - I)\,v = (\beta - 1)\,v$ e quindi $\beta \leq 1$. Pertanto, i valori singolari $d_i = \lambda_i(C)$ di C sono tutti minori o uguali di 1 e quindi si può scrivere il vettore $(d_1, ..., d_n)$ come combinazione convessa di vertici del cubo n-dimensionale $[-1,1]^n$, cioè di matrici diagonali con valori ± 1, ovvero di matrici ortogonali. Pertanto D è combinazione convessa di matrici ortogonali e quindi si è dimostrata la tesi perché il prodotto di matrici ortogonali è ortogonale:

$$C = U\left(\sum_{j=1}^{k} \mu_j D_j\right) V = \sum_{j=1}^{k} \mu_j\,(UD_jV) \in E.$$

□

Osservazione 3.10. *Per la proposizione 3.7 abbiamo che se* $A \in E = O\,(m,n)$ *e* l *indica come al solito il minimo tra* m *e* n*, allora* $\|A\|_2^2 = l$*, mentre il viceversa non è vero. È però evidente che*

$$E = \left\{A \in \mathbb{R}^{m\times n} \colon \|A\|_2^2 = l,\ \lambda_n(A) \leq 1\right\}$$

in quanto le condizioni $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2(A) = l$*,* $\lambda_i(A) \geq 0$ *e* $\max \lambda_i(A) = 1$ *implicano che* $\lambda_i(A) = 1$ *per ogni* $i = n-l+1, ..., n$*, cioè che gli ultimi* l *valori singolari siano uguali a 1, mentre i primi sono nulli per quanto visto nella osservazione 3.5.*

Per quanto riguarda l'inviluppo convesso $K = coE$*, possiamo solo affermare che*

$$K \subset \left\{A \in \mathbb{R}^{m\times n} \colon \|A\|_2^2 \leq l\right\}.$$

Vediamo alcune proprietà dei valori singolari che saranno poi utilizzate per dimostrare che $coE = RcoE$ nel caso delle matrici ortogonali.

Lemma 3.11 (Disuguaglianza di Von Neumann)**.** *Per ogni $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$,*

$$|tr\,(AB)| \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A)\lambda_i(B).$$

Prima di dimostrare il lemma 3.11, ricordiamo che una matrice quadrata è detta doppiamente stocastica se è composta da numeri reali non negativi tali che la somma degli elementi di ogni riga e la somma degli elementi di ogni colonna siano uguali a 1. Per la dimostrazione abbiamo bisogno del seguente lemma.

Lemma 3.12. *Se $D = (d_{rs})$ è una matrice doppiamente stocastica e se $0 \leq x_1 \leq ... \leq x_n$, $0 \leq y_1 \leq ... \leq y_n$, allora*

$$\sum_{r,s=1}^{n} d_{rs}x_r y_s \leq \sum_{r=1}^{n} x_r y_r.$$

Dimostrazione. Per ipotesi, esistono $\xi_i, \eta_i \geq 0$, con $1 \leq i \leq n$, tali che

$$x_r = \sum_{i=1}^{r} \xi_i$$

e

$$y_r = \sum_{i=1}^{r} \eta_i.$$

Allora,

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{n} x_r y_r - \sum_{r,s=1}^{n} d_{rs}x_r y_s &= \sum_{r,s=1}^{n} \left(\delta_{rs} - d_{rs}\right) x_r y_s = \\ &= \sum_{r,s=1}^{n} \left(\delta_{rs} - d_{rs}\right) \sum_{i=1}^{r} \xi_i \sum_{j=1}^{s} \eta_j = \qquad (3.1) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \eta_j \sum_{r=i}^{n} \sum_{s=j}^{n} \left(\delta_{rs} - d_{rs}\right). \end{aligned}$$

Se $i \geq j$, allora, poiché $\delta_{rs} = 0$ per $r \geq i$, $s < j$,

$$\sum_{r=i}^{n} \sum_{s=j}^{n} \left(\delta_{rs} - d_{rs}\right) \geq \sum_{r=i}^{n} \sum_{s=1}^{n} \left(\delta_{rs} - d_{rs}\right) = \sum_{r=1}^{n} \left(\sum_{s=1}^{n} \delta_{rs} - \sum_{s=1}^{n} \right) = 0.$$

Se $i \leq j$ il risultato è analogo, quindi, tornando a (3.1), si ha la tesi. $\square$

Dimostrazione del Lemma 3.11. Per il teorema 3.4, esistono U_1, V_1, U_2, V_2 matrici ortogonali e $R = diag\,(\rho_1, ..., \rho_n)$, $S = diag\,(\sigma_1, ..., \sigma_n)$ matrici diagonali tali che $A = U_1 R V_1$ e $B = U_2 S V_2$. Allora, poiché $tr\,(PQ) = tr\,(QP)$, si ha che

$$tr(AB) = tr(V_2 U_1 R V_1 U_2 S) = tr(U^t R V S)$$

dove $U = (V_2 U_1)^t$ e $V = V_1 U_2$ sono matrici ortogonali. Allora

$$tr(AB) = \sum_{r,s=1}^{n} u_{rs} \rho_r v_{rs} \sigma_s$$

e

$$|tr(AB)| \leq \sum_{r,s=1}^{n} |u_{rs} v_{rs}|\, \rho_r \sigma_s \leq \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^{n} |u_{rs}|^2 \rho_r \sigma_s + \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^{n} |v_{rs}|^2 \rho_r \sigma_s$$

e le matrici $(|u_{rs}|^2)$ e $(|v_{rs}|^2)$ sono doppiamente stocastiche in quanto U e V sono ortogonali. Applicando il lemma 3.12 si ha la tesi. □

Possiamo dimostrare che l'inviluppo convesso delle matrici ortogonali coincide con il suo inviluppo convesso di rango 1.

Teorema 3.13. *Se $E = O(m, n)$, allora*

$$RcoE = \left\{ A \in \mathbb{R}^{m \times n} :\ \lambda_n(A) \leq 1 \right\}.$$

Dimostrazione. Basta dimostrare che $\{A \in \mathbb{R}^{m \times n} :\ \lambda_n(A) \leq 1\} \subseteq RcoE$ in quanto già sappiamo che $RcoE \subseteq coE$. Per il teorema 3.4, senza perdita di generalità, possiamo inoltre dimostrare il teorema per le sole matrici diagonali. Indichiamo con $\mathbb{R}_d^{m \times n} = \{A \in \mathbb{R}^{m \times n} :\ A \text{ è diagonale}\}$ e siano E_d l'insieme delle matrici diagonali ortogonali e X_d l'insieme delle matrici diagonali con valori singolari minori o uguali a 1. Siano $A_i \in E_d$ e $t_i \geq 0$ tali che $\sum t_i = l$. Allora $\sum t_i A_i = diag\,(x_1, ..., x_l)$ con $x_i \in [-1, 1]$. Pertanto

$$coE_d \subset X_d$$

e quindi, in particolare, $RcoE_d \subset X_d$.

Resta da dimostrare che $X_d \subset RcoE_d$. Sia $A \in X_d$, allora A è della forma $A = diag\,(x_1, ..., x_l) \in \mathbb{R}_d^{m \times n}$ con $l = \min\{m, n\}$. Come in 3.9, si può scrivere $(x_1, ..., x_l)$ come combinazione convessa di vertici del cubo l-dimensionale e ottenere che $A \in R_l coE_d \subset RcoE_d$, cioè la tesi.

□

Grazie al teorema appena dimostrato, nella dimostrazione del teorema principale, potremo assumere che $K = coE = RcoE$ abbia la proprietà del segmento, in quanto convesso, e che abbia quindi, per il lemma 1.23, la proprietà di approssimazione.

Capitolo 4

Teorema principale

Suddividiamo questo capitolo in due sezioni. Nella prima vediamo la dimostrazione del teorema principale nel caso unidimensionale, poi nel caso vettoriale. Iniziamo definendo il concetto di funzione di classe C^1 a tratti.

Definizione 4.1. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, allora si dice che $f \in C^1_{piec}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ se f è continua e se esiste una famiglia di aperti a due a due disgiunti $\{\Omega_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tale che $mis\left(\Omega - \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Omega_i\right) = 0$ e tale che f sia di classe C^1 su ciascun Ω_i.

Vediamo un lemma preliminare che richiameremo più volte in seguito.

Lemma 4.2. *Siano* $\{u_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subseteq W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ *e* $u \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ *tali che* $u_\nu \to u$ *in* $* - L^\infty$. *Sia inoltre* $M \in \mathbb{R}$ *tale che* $\|Du_\nu\|_{L^\infty} \leq M$, *allora esiste una sottosuccessione* $\{u_{\nu_k}\} \subseteq \{u_\nu\}$ *tale che* $u_{\nu_k} \to u$ *in* $*$-$W^{1,\infty}$.

Dimostrazione. Poiché $\|Du_\nu\|_{L^\infty} \leq M$, per il teorema di Banach-Alaoglu, esiste una sottosuccessione u_{ν_k} e $v \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ tale che $Du_{\nu_k} \to v$ in $*$-L^∞. Per definizione di derivata debole e di convergenza debole, per ogni funzione test $\psi \in C^\infty_c(\Omega, \mathbb{R}^m)$ si ha che

$$\int_\Omega v\psi\, dx = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega Du_{\nu_k}\psi\, dx = -\lim_{k\to\infty} \int_\Omega u_{\nu_k} D\psi\, dx =$$
$$= -\int_\Omega uD\psi\, dx = \int_\Omega Du\psi\, dx,$$

cioè $v = Du$ e quindi $u_{\nu_k} \to u$ in $*$-$W^{1,\infty}$. □

4.1 Caso unidimensionale

Il problema (1) nel caso unidimensionale consiste nel trovare una funzione $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} u'(x) \in \{-1, 1\} & \text{per q. o. } x \in \Omega \\ u = \varphi & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

dove $\Omega = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo e $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione C^1 a tratti tale che $\varphi'(x) \in [-1, 1]$ per quasi ogni $x \in \Omega$. Dopo alcuni lemmi di approssimazione dimostreremo il seguente teorema.

Teorema 4.3. *Siano $\Omega = (a, b)$, $E = \{-1, 1\}$ e $K = coE = [-1, 1]$. Sia $\varphi \in C^1_{piec}\left(\overline{\Omega}\right)$ tale che $|\varphi'(x)| \leq 1$ per quasi ogni $x \in \Omega$, allora esiste (un insieme denso di) $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ tale che*

$$\begin{cases} u'(x) \in \{-1, 1\} & \text{per q. o. } x \in \Omega, \\ u \in \varphi + W_0^{1,\infty}(\Omega). \end{cases} \tag{4.1}$$

Non dimostreremo solo l'esistenza di una soluzione del problema, ma di un insieme di soluzioni denso nel senso del teorema di Baire.

Teorema 4.4 (di Baire)**.** *Sia V uno spazio metrico completo e siano V^k, $k \in \mathbb{N}$, sottoinsiemi aperti densi di V. Allora*

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} V^k$$

è densa in V. In altre parole, l'intersezione numerabile di aperti densi è densa.

Costruiremo uno spazio metrico completo e una successione numerabile di suoi sottoinsiemi. Dimostreremo che tali sottoinsiemi sono aperti densi e mostreremo che l'intersezione di questi è costituita esattamente da funzioni che soddisfano (4.1).

4.1.1 Lemmi di approssimazione: caso unidimensionale

Prima di dimostrare il teorema 4.3, abbiamo bisogno di alcuni lemmi preliminari che verranno ripresi anche nel caso vettoriale. Il primo lemma consente di approssimare una funzione di classe C^1 con una funzione lineare a tratti.

Lemma 4.5. *Siano* $\Omega = (a, b)$ *e* $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$. *Per ogni* $\varepsilon > 0$, *esistono* $u_\varepsilon \in C^1_{piec}\left(\overline{\Omega}\right)$, $J \in \mathbb{N}$, $\xi_{\varepsilon,j} \in \mathbb{R}$ *e intervalli aperti disgiunti* $\Omega_{\varepsilon,j} \subseteq \Omega$, *tali che*

$$\begin{cases} u_\varepsilon(a) = u(a) \text{ e } u_\varepsilon(b) = u(b), \\ \|u_\varepsilon - u\|_{W^{1,\infty}} \leq \varepsilon, \\ u'_\varepsilon(x) = \xi_{\varepsilon,j} & \text{se } x \in \Omega_{\varepsilon,j}, \\ mis\left(\Omega - \bigcup_{j=1}^{J} \Omega_{\varepsilon,j}\right) = 0. \end{cases}$$

Dimostrazione. Sia $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ come da ipotesi. Allora, per l'uniforme continuità di u, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta' > 0$ tale che

$$|u(x) - u(y)| \leq \frac{\varepsilon}{4} \text{ se } |x - y| \leq \delta'.$$

Analogamente, poiché anche u' è uniformemente continua su $[a, b]$, si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta'' > 0$ tale che

$$|u'(x) - u'(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ se } |x - y| \leq \delta''.$$

Fissato $\varepsilon > 0$, si definiscono $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$ e $\mathbb{N} \ni J > \frac{b-a}{\delta}$. Si suddivide l'intervallo $\Omega = (a, b)$ in J sottointervalli $\Omega_{\varepsilon,j}$, ciascuno di misura minore o uguale a δ. Su un generico intervallo $\Omega_{\varepsilon,j} = (x_j, x_{j+1})$ si definisce la retta passante per $(x_j, u(x_j))$ e $(x_{j+1}, u(x_{j+1}))$, cioè

$$u_{\varepsilon,j}(x) = \frac{u(x_{j+1}) - u(x_j)}{x_{j+1} - x_j}(x - x_j) + u(x_j) = -\frac{u(x_j) - u(x_{j+1})}{x_{j+1} - x_j}(x - x_j) + u(x_j).$$

Allora, se $x \in \Omega_{\varepsilon,j}$

$$\begin{aligned} |u(x) - u_{\varepsilon,j}(x)| &= \left| u(x) - u(x_j) + \frac{u(x_j) - u(x_{j+1})}{x_{j+1} - x_j}(x - x_j) \right| \leq \\ &\leq |u(x) - u(x_j)| + \left| \frac{u(x_j) - u(x_{j+1})}{x_{j+1} - x_j}(x - x_j) \right| \leq \\ &\leq |u(x) - u(x_j)| + |u(x_j) - u(x_{j+1})| \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Analogamente, poiché per il teorema di Lagrange esiste un punto $c_j \in (x_j, x_{j+1})$ tale che $u'(c_j) = \frac{u(xj+1) - u(x_j)}{x_{j+1} - x_j} = \xi_{\varepsilon,j}$, si ha che

$$|u'(x) - u_{\varepsilon,j}(x)| = |u'(x) - \xi_{\varepsilon,j}| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Definendo
$$u_\varepsilon(x) = u_{\varepsilon,j}(x) \text{ se } x \in \Omega_{\varepsilon,j},$$
si ha la tesi. $\square$

Osservazione 4.6. *Si osservi che se la funzione di partenza è tale che $u'(x) \in (-1,1)$ per ogni $x \in \Omega$, allora anche ogni $\xi_{\varepsilon,j}$ costruito nella dimostrazione del teorema è tale che $\xi_{\varepsilon,j} \in (-1,1)$.*

Il prossimo lemma permette di approssimare una funzione lineare con funzioni le cui derivate assumono esattamente due valori.

Lemma 4.7. *Siano $\Omega = (a,b)$ e $t \in [0,1]$. Siano $A, B \in \mathbb{R}$, $\xi = tA+(1-t)B$ e $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ definita da $\varphi(x) = \xi x$. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$, esistono $u \in C^1_{piec}\left(\overline{\Omega}\right)$ e aperti disgiunti Ω_A, Ω_B tali che*

1) $\varphi(a) = u(a)$ *e* $\varphi(b) = u(b)$,

2) $\|u - \varphi\|_{L^\infty} \leq \varepsilon$,

3) $mis\,(\Omega_A) = t(b-a)$ *e* $mis\,(\Omega_B) = (1-t)(b-a)$,

4)
$$u'(x) = \begin{cases} A & \textit{se } x \in \Omega_A, \\ B & \textit{se } x \in \Omega_B, \end{cases}$$

Dimostrazione. Senza perdita di generalità, possiamo supporre $\Omega = (0,1)$. Si definisce
$$H(s) = \begin{cases} (1-t)s & \text{se } s \in (0,t), \\ (1-s)t & \text{se } s \in [t,1) \end{cases}$$
e la si estende periodicamente su tutta la retta reale definendo
$$\tilde{H}(s) = H\left(s - \lfloor s \rfloor\right),$$
dove $\lfloor s \rfloor$ indica la parte intera di s. Si considera
$$u(x) = \xi x + \frac{1}{j}\tilde{H}(jx)\,(A-B)$$

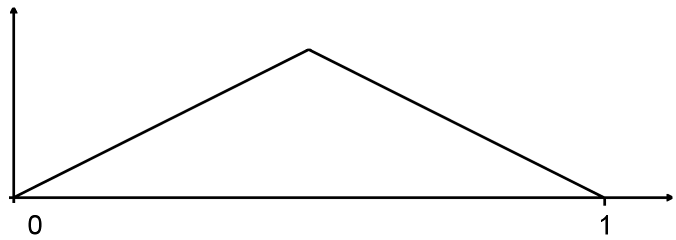

Figura 4.1: La funzione H del lemma 4.7.

e si ha che valgono le condizioni sul bordo, ovvero $u(0) = 0 = \varphi(0)$ e $u(1) = \xi = \varphi(1)$. Inoltre

$$\begin{aligned} \|u - \varphi\|_{L^\infty} &\leq \frac{1}{j} \|H\|_{L^\infty} |A - B| = \\ &= \frac{1}{j} t(1-t) |A - B| \leq \frac{|A - B|}{4j}. \end{aligned}$$

Dunque $u \in C^1_{piec}\left(\overline{\Omega}\right)$ e vale la convergenza in norma L^∞. Dobbiamo verificare la condizione sulla derivata. Poiché

$$\tilde{H}'(s) = \begin{cases} 1 - t & \text{se } s \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} k + (0, t), \\ -t & \text{se } s \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} k + (t, 1), \end{cases}$$

si ha

$$u'(x) = \begin{cases} \xi + (1 - t)(A - B) & \text{se } jx \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} k + (0, t), \\ \xi - t(A - B) & \text{se } jx \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} k + (t, 1), \end{cases}$$

e quindi, ricordando che $\xi = tA + (1-t)B$, si ottiene

$$u'(x) = \begin{cases} A & \text{se } x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{j} k + \frac{1}{j}(0, t), \\ B & \text{se } x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{j} k + \frac{1}{j}(t, 1). \end{cases}$$

Scegliendo

$$\Omega_A = (0, 1) \cap \left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{j} k + \frac{1}{j}(0, t) \right)$$

e

$$\Omega_B = (0,1) \cap \left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{j}k + \frac{1}{j}(t,1) \right)$$

si ottiene la tesi. □

Osservazione 4.8. *Nel caso unidimensionale, come detto, si ha* $E = \{-1, 1\}$ *e* $K = coE = [-1, 1]$*. Banalmente, vale la proprietà di approssimazione, cioè per ogni* $\delta > 0$*, definendo* $E_\delta = \{-1+\delta, 1-\delta\}$*, si ha che*

- *i)* $coE_\delta = [-1+\delta, 1-\delta] \Subset intcoE = (-1,1)$,
- *ii) per ogni* $\eta \in E_\delta$*,* $dist\,(\eta, E) = \delta$,
- *iii) se* $\eta \in intcoE = (-1,1)$*, si ha che* $\eta \in coE_\delta = [-1+\delta, 1-\delta]$ *se* δ *è sufficientemente piccolo.*

Possiamo enunciare il seguente lemma. L'idea della dimostrazione verrà ripresa nel lemma 4.12 per il caso vettoriale.

Lemma 4.9 (Proprietà di rilassamento)**.** *Siano* $\Omega = (a, b)$ *e* $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *definita da* $\varphi(x) = \xi x$ *con* $\xi \in (-1, 1)$*. Allora, esiste* $\{u_\nu\} \subset C^1_{piec}\left(\overline{\Omega}\right)$ *tale che*

- *1)* $u_\nu \in \varphi + W^{1,\infty}_0(\Omega)$,
- *2)* $u_\nu \to \varphi$ *in* $*$-$W^{1,\infty}$,
- *3)* $u'_\nu \in [-1, 1]$
- *4)* $\int_\Omega dist\,(u'_\nu(x), E)\; dx \to 0$ *se* $\nu \to +\infty$.

Dimostrazione. Per quanto osservato, per δ sufficientemente piccolo, poiché $\xi \in (-1, 1)$, si ha che $\xi \in [-1+\delta, 1-\delta]$, dunque esiste $t \in [0, 1]$ tale che $\xi = t(-1+\delta) + (1-t)(1-\delta)$. Indichiamo con $A = -1+\delta$ e $B = 1-\delta$, per cui abbiamo $\xi = tA + (1-t)B$.

Per il lemma 4.7, esiste $u^\delta_\nu \in C^1_{piec}\left(\overline{\Omega}\right)$ e $\Omega_A, \Omega_B \subset \Omega$ aperti disgiunti tali che

$$\begin{cases} mis\,(\Omega_A) = t(b-a) \text{ e } mis\,(\Omega_B) = (1-t)(b-a), \\ u(a) = \varphi(a) \text{ e } u(b) = \varphi(b), \\ \|u - \varphi\|_{L^\infty} \le \frac{1}{\nu} \text{ su } \Omega, \\ u'(x) = \begin{cases} A & \text{se } x \in \Omega_A, \\ B & \text{se } x \in \Omega_B. \end{cases} \end{cases}$$

In particolare, $dist\,(u'(x), E_\delta) = 0$ e $dist\,(u'(x), coE_\delta) = 0$. Si ha quindi che $u'(x) \in (-1,1)$ e quindi

$$dist\,(u'(x), E) \leq dist\,(u'(x), E_\delta) + dist\,(E_\delta, E) = \delta.$$

Scegliendo $\delta = \frac{1}{\nu}$, si ottiene

$$\int\limits_\Omega dist\,(u'(x), E)\; dx = \frac{1}{\nu} mis\,(\Omega) \to 0$$

se $\nu \to \infty$. Poiché poi $u_\nu \to \varphi$ in *-L^∞ e poiché $|u'(x)| \leq 1$, a meno di sottosuccessioni, si ha che $u_\nu \to \varphi$ in *-$W^{1,\infty}$ per il lemma 2.3. □

4.1.2 Dimostrazione del teorema: caso unidimensionale

Utilizzando i lemmi di approssimazione dimostrati, possiamo infine dimostrare il teorema 4.3.

Dimostrazione del Teorema 4.3. Step 1: Si può definire $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ponendo

$$F(\xi) = |\xi| - 1.$$

Allora,

$$K = \{x \in \mathbb{R}\colon\; F(x) \leq 0\}$$

e

$$E = \{x \in \mathbb{R}\colon\; F(x) = 0\}\,.$$

Inoltre, F è convessa e quindi, in particolare, è quasi-convessa. Si definiscono

$$W = \left\{u \in C^1_{piec}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m\right) :\; u \in \varphi + W_0^{1,\infty}(\Omega)\,,\; |u'(x)| \leq 1 \text{ per q. o. } x \in \Omega\right\}$$

e $V = \overline{W}^{L^\infty}$. Poiché $\varphi \in W \subseteq V \neq \emptyset$, V risulta essere uno spazio metrico completo se dotato della norma L^∞. Dimostriamo adesso che se $u \in V$, allora $F(u'(x)) \leq 0$ per quasi ogni $x \in \Omega$. Se $u \in V$, allora per definizione, esiste una successione $\{u_k\} \subseteq W$ tale che $u_k \to u$ in L^∞. In particolare, $|u_k'(x)| \leq 1$ e quindi, per il lemma 4.2, a meno di sottosuccessioni, $u_k \to u$ in *-$W^{1,\infty}$. Poiché F è quasi-convessa, il teorema 2.1 garantisce la semicontinuità inferiore del funzionale integrale definito da

$$I(u_k) = \int\limits_\Omega F\left(u_k'(x)\right)\, dx,$$

cioè
$$\int_{\Omega} F\left(u'(x)\right)\,dx \leq \liminf_{k\to\infty} \int_{\Omega} F\left(u_k'(x)\right)\,dx.$$
Adesso, poiché $F\left(Du_k(x)\right) \leq 0$ per quasi ogni $x \in \Omega$, si ha che per ogni $\Omega' \subseteq \Omega$ misurabile,
$$\int_{\Omega'} F\left(u_k'(x)\right)\,dx \leq 0,$$
da cui, per semicontinuità, si ottiene che
$$\int_{\Omega'} F\left(u'(x)\right)\,dx \leq 0.$$
Per dimostrare che $F\left(u'(x)\right) \leq 0$ quasi ovunque in Ω, osserviamo che, indicato con
$$G_k = \left\{x \in \Omega\colon\ F\left(u'(x)\right) \geq \frac{1}{k}\right\},$$
risulta
$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} G_k = \left\{x \in \Omega\colon\ F\left(u'(x)\right) > 0\right\}.$$
Se per assurdo esistesse un $k \in \mathbb{N}$ tale che $mis\left(G_k\right) > 0$, allora risulterebbe
$$\int_{G_k} F\left(u'(x)\right)\,dx \geq \frac{1}{k} mis\left(G_k\right) > 0$$
che è assurdo. Pertanto $F\left(u'(x)\right) \leq 0$.

Step 2: Procediamo ora con un ragionamento fondamentale per l'utilizzo del teorema di Baire. Se
$$V^k = \left\{u \in V\colon\ I(u) > -\frac{1}{k}\right\},$$
allora V^k è aperto nella topologia di L^∞ perché I è semicontinuo inferiormente.

Dimostriamo che V^k è denso in V. Sia $u \in V$, allora dobbiamo dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $u_\varepsilon \in V^k$ tale che $\|u_\varepsilon - u\|_{L^\infty} \leq \varepsilon$. Per come è definito V, si può supporre che $u \in W$ per poi concludere per densità nel caso generale. Inoltre, a meno di considerare ogni componente in cui u è regolare, si può supporre che $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$. Siano

$$\Omega_0 = \{x \in \Omega \colon \ |u'(x)| = 1\} = \{x \in \Omega \colon \ F\left(u'(x)\right) = 0\}$$

e

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega \colon \ |u'(x)| < 1\} = \{x \in \Omega \colon \ F\left(u'(x)\right) < 0\}.$$

Per continuità, Ω_0 è chiuso in Ω e Ω_1 è aperto. Inoltre, poiché $|u'(x)| \leq 1$, si ha che $dist\left(u'(x), E\right) \leq 1$ per quasi ogni $x \in \Omega$. Poiché F è uguale a 0 su E, per ogni $0 < \varepsilon < \frac{1}{k}$ esiste $\delta > 0$ tale che se

$$\int\limits_{\Omega} dist\left(u'(x), E\right)\, dx \leq \delta,$$

allora

$$\int\limits_{\Omega} F\left(u'(x)\right)\, dx \geq -\varepsilon.$$

Siamo nelle ipotesi del teorema 4.5 e quindi possiamo ricoprire Ω_1 con sottointervalli $\Omega_{s,j}$, con $1 \leq j \leq J \in \mathbb{N}$, e trovare una funzione $u_s \in C^1_{piec}\left(\overline{\Omega}\right)$ tale che

$$\begin{cases} u_s(a) = u(a) \text{ e } u_s(b) = u(b), \\ \|u_s - u\|_{W^{1,\infty}} \leq \varepsilon, \\ u_s'(x) = \xi_{s,j} & \text{se } x \in \Omega_{s,j}, \end{cases}$$

con $|\xi_{s,j}| \leq 1$, per quanto visto nell'osservazione 4.6.

Adesso, grazie al lemma 4.9, possiamo trovare delle funzioni $u_{j,\nu} \in C^1_{piec}\left(\overline{\Omega_{s,j}}\right)$ tali che

$$\begin{cases} u_{j,\nu} \in u_s + W_0^{1,\infty}\left(\Omega_{s,j}\right), \\ \|u_s - u_{j,\nu}\|_{L^\infty} \leq \frac{\varepsilon}{2}, \\ \left|u'_{j,\nu}(x)\right| \leq 1 & \text{q. o. in } \Omega_{s,j}, \\ \int\limits_{\Omega_{s,j}} dist\left(u'_{j,\nu}(x), E\right)\, dx \leq \delta \frac{mis(\Omega_{s,j})}{mis(\Omega_1)}. \end{cases}$$

Si definisce allora

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in \Omega_0, \\ u_s(x) & \text{se } x \in \Omega_1 - \bigcup\limits_{j=1}^{J} \Omega_{s,j}, \\ u_{j,\nu}(x) & \text{se } x \in \Omega_{s,j}, \end{cases}$$

e quindi

$$\int_{\Omega} dist\left(u_\varepsilon'(x), E\right)\, dx = \int_{\Omega_0} dist\left(u_\varepsilon'(x), E\right)\, dx + \int_{\Omega_1} dist\left(u_\varepsilon'(x), E\right)\, dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{J} \int_{\Omega_{s,j}} dist\left(u_\varepsilon'(x), E\right)\, dx \leq \delta.$$

Per quanto osservato, si ha che

$$I\left(u_\varepsilon\right) \geq -\varepsilon > -\frac{1}{k}$$

cioè che $u_\varepsilon \in V^k$, provando la densità di V^k in V.

Per il teorema di Baire, l'insieme

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} V^k = \{u \in V:\ I(u) \geq 0\} = \{u \in V:\ F\left(u'(x)\right) = 0 \text{ per q. o. } x \in \Omega\}$$

è denso in V, concludendo la dimostrazione del teorema. $\square$

4.2 Caso vettoriale

La struttura della dimostrazione del teorema nel caso vettoriale è del tutto simile a quella nel caso unidimensionale. La difficoltà maggiore risiede nella dimostrazione dei lemmi di approssimazione.

4.2.1 Lemmi di approssimazione: caso vettoriale

In analogia con la sezione 4.1.1, iniziamo col dimostrare il seguente lemma, analogo al 4.5, in cui si dimostra che si può suddividere un aperto Ω in un numero finito di aperti $\Omega_{\varepsilon,j}$ che ricoprano Ω a meno di un insieme di misura nulla in modo tale che, su questi aperti, una funzione di classe C^1 sia approssimabile con funzioni che hanno gradiente costante.

Lemma 4.10. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e limitato e sia $K \subset \mathbb{R}^{m\times n}$ un compatto. Sia $u \in C^1\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m\right)$ tale che $Du(x) \in intK$ per ogni $x \in \Omega$.*

Per ogni $\varepsilon > 0$, *esistono* $u_\varepsilon \in C^1_{piec}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m\right)$, $J \in \mathbb{N}$, $\xi_{\varepsilon,j} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *e* $\Omega_{\varepsilon,j} \subset \Omega$ *aperti disgiunti, per* $1 \leq j \leq J$, *tali che:*

$$\begin{cases} u_\varepsilon \equiv u \textit{ in un intorno di } \partial\Omega, \\ \|u_\varepsilon - u\|_{W^{1,\infty}} \leq \varepsilon, \\ Du_\varepsilon(x) \in intK \textit{ per quasi ogni } x \in \Omega, \\ mis\left(\Omega - \bigcup_{j=1}^{J} \Omega_{\varepsilon,j}\right) \leq \varepsilon, \\ Du_\varepsilon(x) = \xi_{\varepsilon,j} \textit{ se } x \in \Omega_{\varepsilon,j}. \end{cases}$$

Dimostrazione. Dividiamo la dimostrazione del teorema in due parti. Prima analizziamo il caso in cui $m = 1$, poi il caso generale.

Step 1: Sia $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$. Per il teorema 2.3, a meno di dilatazioni e traslazioni, si può supporre senza perdita di generalità che Ω sia il cubo unitario. Sia $y \in \Omega$ e sia u_y il polinomio di Taylor centrato in y di u, cioè

$$u_y(x) = u(y) + Du(y)(x - y).$$

Poiché $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ e $\overline{\Omega}$ è compatto, per ogni $\sigma > 0$ esiste $0 < \tau < 1$ tale che, se $x, y \in \overline{\Omega}$ sono tali che $|x - y| < \tau$, allora valgono le seguenti due condizioni:

$$\begin{cases} |u(x) - u_y(x)| \leq \sigma\tau \\ |Du(x) - Du_y(x)| \leq \sigma. \end{cases} \tag{4.2}$$

Sia allora

$$C_\tau(y) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon \; \max_i |x_i - y_i| < \frac{\tau}{\sqrt{n}} \right\}$$

il cubo di lunghezza τ, centrato in y. Allora, $x \in C_\tau(y)$ e quindi vale (4.2). Si sceglie $\eta \in C^\infty_c\left(\overline{C_\tau(y)}\right)$ tale che

$$\begin{cases} 0 \leq \eta(x) \leq 1, \\ \eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in C_{\tau-2\rho}(y), \\ 0 & \text{se } x \in C_\tau(y) - C_{\tau-\rho}(y), \end{cases} \\ |D\eta(x)| \leq \frac{K_1}{\rho^2} \text{ per ogni } x \in C_\tau(y), \end{cases}$$

dove abbiamo posto $\rho = \tau\sigma^{\frac{1}{2}}$. Definiamo allora $v \in C^1\left(\overline{C_\tau(y)}\right)$ come

$$v(x) = u(x) + \eta(x)\left(u_y(x) - u(x)\right).$$

Allora

$$\begin{cases} v \equiv u & \text{in } C_\tau(y) - C_{\tau-\rho}(y), \\ Dv(x) = Du(y) & \text{per ogni } x \in C_{\tau-2\rho}(y), \\ mis\,(C_\tau(y) - C_{\tau-2\rho}(y)) \leq K_2 \rho \tau^{n-1} = K_2 \tau^n \sigma^{\frac{1}{2}} \leq \\ \qquad \leq K_3 mis\,(C_\tau(y))\,\sigma^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} |v(x) - u(x)| &= |\eta(x)\,(u_y(x) - u(x))| = |\eta(x)|\,|u_y(x) - u(x)| \leq \\ &\leq |u_y(x) - u(x)| \leq \sigma\tau \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |Dv(x) - Du(x)| &= |D\,(\eta(x)(u_y(x) - u(x)))| = \\ &= |D\eta(x)\,(u_y(x) - u(x)) + \eta(x)\,(Du_y(x) - Du(x))| \leq \\ &\leq |D\eta(x)|\,|u_y(x) - u(x)| + |\eta(x)|\,|Du_y(x) - Du(x)| \leq \\ &\leq \frac{K_1}{\rho}\sigma^{\frac{1}{2}} + \sigma = \frac{K_1}{\tau\sigma^{\frac{1}{2}}}\sigma^{\frac{1}{2}} + \sigma = \frac{K_1}{\tau} + \sigma = \frac{K_1 + \sigma\tau}{\tau} = \\ &= K_4 \sigma^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

da cui si deduce che

$$\|v - u\|_{W^{1,\infty}} \leq K\sigma^{\frac{1}{2}} \text{ su } C_\tau(y).$$

Sia σ tale che

$$\max\{K, 2K_3 mis\,(\Omega)\}\,\sigma^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon$$

allora, a meno di restringere τ, si possono scegliere $y_j \in \Omega$, con $1 \leq j \leq J$, tali che

$$mis\left(\Omega - \bigcup_{j=1}^{J} C_\tau(y_j)\right) \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

con $C_\tau(y_j) \cap C_\tau(y_i) = \emptyset$ se $i \neq j$. Sia $\Omega_{\varepsilon,j} = C_{\tau-2\rho}(y_j)$, allora

$$\begin{aligned} mis\left(\Omega - \bigcup_{j=1}^{J} \Omega_{\varepsilon,j}\right) &\leq mis\left(\Omega - \bigcup_{j=1}^{J} C_\tau(y_j)\right) + \sum_{j=1}^{J} mis\,(C_\tau(y_j) - C_{\tau-2\rho}(y_j)) \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + K_3 mis\,(\Omega)\,\sigma^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Ponendo

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in \Omega - \bigcup_{j=1}^{J} C_\tau(y_j), \\ v(x) & \text{se } x \in C_\tau(y_j), \end{cases}$$

si ha la tesi nel caso $m = 1$.

Step 2: Supponiamo adesso che $m > 1$. Allora, poiché su ogni sottoinsieme compatto di Ω si ha che $dist\,(Du(x), \partial K) \geq k > 0$, per lo Step 1 si ha la convergenza uniforme di u_ε a u, insieme al gradiente. Definendo $u_\varepsilon \equiv u$ in un intorno di $\partial\Omega$ e applicando la prima parte della dimostrazione ad ogni componente di u, si ha la tesi. □

Il seguente lemma di approssimazione è analogo al lemma 4.7 visto nel caso unidimensionale.

Lemma 4.11. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto con misura finita. Sia $t \in [0,1]$ e siano A, $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con $rg\,\{A - B\} = 1$. Sia φ tale che*

$$D\varphi(x) = tA + (1-t)B,$$

per ogni $x \in \overline{\Omega}$. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $u \in C^1_{piec}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ e aperti disgiunti $\Omega_A, \Omega_B \subset \Omega$ tali che:

$$\begin{cases} \left|mis\,(\Omega_A) - t\cdot mis\,(\Omega)\right|, \left|mis\,(\Omega_B) - (1-t)\cdot mis\,(\Omega)\right| \leq \varepsilon, \\ u \equiv \varphi \textit{ in un intorno di } \partial\Omega, \\ \|u-\varphi\|_{L^\infty} \leq \varepsilon, \\ Du(x) = \begin{cases} A & \textit{se } x \in \Omega_A, \\ B & \textit{se } x \in \Omega_B, \end{cases} \\ dist\,(Du(x), co\,\{A,B\}) \leq \varepsilon \textit{ quasi ovunque in } \Omega \end{cases}$$

dove $co\,\{A, B\}$ è il segmento chiuso che collega A a B.

Dimostrazione. Step 1: Studiamo dapprima il caso in cui $A - B$ sia della forma $\alpha \otimes e_1$, con $\alpha \in \mathbb{R}^m$ e $e_1 \in \mathbb{R}^n$. In particolare

$$A - B = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \alpha_m & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Supponiamo intanto che Ω coincida con il cubo unitario $[0,1]^n$ e costruiamo una funzione $v\colon [0,1] \to \mathbb{R}^m$ e due sottoinsiemi aperti di $[0,1]$, I e J, tali che

$$\begin{cases} I \cap J = \emptyset, \\ \overline{I} \cup \overline{J} = [0,1], \\ mis(I) = t, \\ mis(J) = 1-t, \\ v'(x_1) = \begin{cases} (1-t)\alpha & \text{se } x_1 \in I, \\ -t\alpha & \text{se } x_1 \in J, \end{cases} \\ |v(x_1)| \leq \delta \text{ per ogni } x_1 \in (0,1) \end{cases}$$

Per farlo, sia $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^m$ definita da

$$f(s) = \begin{cases} (1-t)\alpha & \text{se } s \in [0,t], \\ -t\alpha & \text{se } s \in (t,1] \end{cases}$$

e sia

$$w(x_1) = \int_0^{x_1} f(s)\, ds.$$

Allora $w(0) = 0$ e $w(1) = (1-t)\alpha \int_0^t ds - t\alpha \int_0^t ds = 0$. Come fatto nella dimostrazione del lemma 4.7, possiamo estendere in maniera periodica w da $[0,1]$ a tutto $\mathbb{R}$ e definire, per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$v(x_1) = \frac{1}{k} w(kx_1),$$

omettendo la dipendenza di v da k. Si definiscono poi

$$I = \{x_1 \in (0,1) \colon\ v'(x_1) = (1-t)\alpha\}$$

e

$$J = \{x_1 \in (0,1) \colon\ v'(x_1) = -t\alpha\}.$$

Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ e per k sufficientemente grande, $|v(x_1)| < \delta$ e

$$v'(x_1) = \begin{cases} (1-t)\alpha & \text{se } x_1 \in I \\ -t\alpha & \text{se } x_1 \in J. \end{cases}$$

Si è quindi costruita la funzione v desiderata. Con un abuso di notazione, chiameremo $v(x) = v(x_1, ..., x_n) = v(x_1)$.

Siano ora $\Omega_\varepsilon \Subset \Omega$, $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$ e $L > 1$ tali che

$$\begin{cases} mis\,(\Omega - \Omega_\varepsilon) \leq \varepsilon, \\ 0 \leq \eta(x) \leq 1, \\ \eta(x) = 1 & \text{per ogni } x \in \Omega_\varepsilon, \\ |D\eta(x)| \leq \frac{L}{\varepsilon} & \text{per ogni } x \in \Omega - \Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

Possiamo allora definire

$$u = \eta\,(v + \varphi) + (1 - \eta)\,\varphi = \eta v + \varphi.$$

Scegliendo δ sufficientemente piccolo si ha che u soddisfa la conclusione del lemma, con

$$\Omega_A = \{x \in \Omega_\varepsilon :\ x_1 \in I\} \text{ e}$$
$$\Omega_B = \{x \in \Omega_\varepsilon :\ x_1 \in J\}.$$

Infatti, poiché $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$ si ha che $u \equiv \varphi$ in un intorno di $\partial\Omega$. Per ogni $x \in \Omega$,

$$|u(x) - \varphi(x)| = |\eta(x)v(x)| = |\eta(x)|\,|v(x)| \leq |v(x)| \leq \delta,$$

da cui $\|u - \varphi\|_{L^\infty} \leq \varepsilon$ scegliendo $\delta \leq \varepsilon$. Poiché poi $\eta \equiv 1$ in Ω_ε, si ha che

$$\begin{aligned} Du &= vD\eta + \eta Dv + D\varphi = Dv + D\varphi = Dv + tA + (1-t)B \\ &= \begin{cases} (1-t)(A-B) + tA + (1-t)B & \text{in } \Omega_A \\ -t(A-B) + tA + (1-t)B & \text{in } \Omega_B \end{cases} \\ &= \begin{cases} A & \text{in } \Omega_A \\ B & \text{in } \Omega_B. \end{cases} \end{aligned}$$

Resta da dimostrare che $dist\,(Du, co\,\{A, B\}) \leq \varepsilon$ quasi ovunque in Ω. Intanto, $Du = \eta Dv + v \otimes D\eta + D\varphi$ e $|v \otimes D\eta| \leq \delta\frac{L}{\varepsilon} \leq \varepsilon$ se si sceglie $\delta \leq \frac{\varepsilon^2}{L}$. Poiché $Dv \in \{(1-t)\alpha, -t\alpha\}$, si ha che $Dv + D\varphi$ e $D\varphi$ appartengono a $co\,\{A, B\}$ e quindi

$$Dv + D\varphi \in \{A, B\}.$$

Si ha allora

$$\eta Dv + D\varphi = \eta\,(Dv + D\varphi) + (1 - \eta)D\varphi \in co\,\{A, B\}$$

e dunque Du è composto da un termine di $co\{A, B\}$ e dal resto $v \otimes D\eta$, che può essere reso arbitrariamente piccolo. Pertanto, $dist\,(Du, co\{A, B\}) \leq \varepsilon$ quasi ovunque in Ω.

Step 2: Se Ω è un aperto con misura finita qualunque, allora per il teorema 2.3, lo si può suddividere in una unione finita di cubi e un insieme di misura piccola a piacere, sul quale si definirà $u = \varphi$. A meno di dilatazioni e traslazioni, su ogni cubo si può costruire una funzione che soddisfi la tesi del teorema come nello Step 0. Incollando queste funzioni si è costruita su Ω una funzione che soddisfa la tesi. Si osservi che tale funzione è di classe C^1 su ogni cubo e di classe C^0 su Ω, essendo uguale a φ in un intorno dei bordi di tutti i cubi.

Step 3: Consideriamo adesso il caso in cui $A - B$ sia una qualunque matrice di rango 1, ovvero

$$A - B = \alpha \otimes v = \begin{bmatrix} \alpha_1 v_1 & \dots & \alpha_1 v_n \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_m v_1 & \dots & \alpha_m v_n \end{bmatrix}.$$

A meno di rimpiazzare α con $|v|\alpha$, si può assumere $|v| = 1$. Si può inoltre trovare una matrice di rotazione $R = (r_{ij}) \in SO(n)$ tale che $v = e_1 R$. Siano allora $\tilde{\Omega} = \Omega R^t$, $\tilde{A} = AR^t$ e $\tilde{B} = BR^t$. In componenti, si ha

$$\tilde{A}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} r_{jk},$$
$$\tilde{B}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} B_{ik} r_{jk}.$$

Allora $\tilde{A} - \tilde{B} = (A - B)\, R^t = \alpha \otimes vR^t = \alpha \otimes e_1$. Per quanto visto nella prima parte della dimostrazione, definendo $\tilde{\varphi}(y) = \varphi(Ry)$, si trovano $\tilde{\Omega}_A$, $\tilde{\Omega}_B$ e $\tilde{u} \in C^1_{piec}\left(\overline{\tilde{\Omega}}, \mathbb{R}^m\right)$ con le proprietà desiderate.

Per concludere, si definiscono $u(x) = \tilde{u}\,(R^t x)$ per $x \in \Omega$, $\Omega_A = R\tilde{\Omega}_A$ e $\Omega_B = R\tilde{\Omega}_B$. $\square$

Vediamo un altro lemma che utilizzeremo nella dimostrazione del teorema principale, analogo al lemma 4.9 del caso unidimensionale. Si afferma l'esistenza di una successione che approssima una funzione affine con gradiente appartenente a $intRcoE$ nel caso in cui E goda della proprietà di approssimazione, introdotta nella definizione 1.21. L'esistenza di tale successione è detta proprietà di rilassamento di K rispetto ad E. Nel caso particolare in cui $E = O(m,n)$, per quanto abbiamo visto nel capitolo 3, $RcoE$ coincide con coE e quindi il teorema si adatta allo studio del problema (1).

Lemma 4.12 (Proprietà di rilassamento)**.** *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^{m\times n}$ un insieme chiuso con la proprietà di approssimazione. Sia $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definita da $\varphi(x) = \xi x$, con $\xi \in \mathbb{R}^{m\times n}$, tale che $\xi \in intK$. Allora, per ogni $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitato, esiste $\{u_\nu\} \subset C^1_{piec}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m\right)$ tale che*

i) $u_\nu \in \varphi + W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$,

ii) $u_\nu \to \varphi$ *in* $*$-$W^{1,\infty}$,

iii) $Du_\nu(x) \in E \cup intK$ *quasi ovunque in* Ω,

iv) $\int_\Omega dist\,(Du_\nu(x), E)\; dx \to 0$ *se* $\nu \to \infty$.

Dimostrazione. Per ipotesi E gode della proprietà di approssimazione, quindi per ogni $\delta > 0$ esiste un chiuso E_δ tale che

i) $RcoE_\delta \Subset intRcoE$;

ii) per ogni $\eta \in E_\delta$ vale che $dist\,(\eta, E) \le \delta$;

iii) se $\eta \in intRcoE$, allora $\eta \in RcoE_\delta$ per ogni $\delta > 0$ sufficientemente piccolo.

Step 1: Sia $\nu \in \mathbb{N}$. Si afferma che per dimostrare la tesi è sufficiente mostrare che per ogni $\delta > 0$ esistono $u_\nu^\delta \in C^1_{piec}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m\right)$, che con abuso di notazione chiameremo semplicemente u_ν, e un aperto $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ tali che

$$\begin{cases} mis\left(\Omega - \tilde{\Omega}\right) \le \frac{1}{\nu} mis\,(\Omega)\,, \\ u_\nu \equiv \varphi \text{ in un intorno di } \partial\Omega, \\ \|u_\nu - \varphi\|_{L^\infty} \le \frac{1}{\nu}, \\ dist\,(Du_\nu(x), RcoE_\delta) \le \frac{1}{\nu} \text{ per q. o. } x \in \Omega, \\ dist\,(Du_\nu(x), E_\delta) \le \frac{1}{\nu} \text{ per q. o. } x \in \tilde{\Omega}. \end{cases} \tag{4.3}$$

Poiché $RcoE_\delta \Subset intRcoE$ e $dist\,(Du_\nu(x), RcoE_\delta) \le \frac{1}{\nu}$, scegliendo ν sufficientemente grande si ha che

$$Du_\nu(x) \in intRcoE.$$

Poiché se $\eta \in E_\delta$, allora $dist\,(\eta, E) < \delta$, si ha che

$$dist\,(Du_\nu, E) \leq dist\,(Du_\nu, E_\delta) + dist\,(E_\delta, E) \leq \frac{1}{\nu} + \delta.$$

Scegliendo adesso $\delta = \frac{1}{\nu}$, si ottiene

$$\begin{aligned}\int_\Omega dist\,(Du_\nu(x), E)\;dx &= \int_{\Omega-\tilde{\Omega}} dist\,(Du_\nu(x), E)\;dx + \int_{\tilde{\Omega}} dist\,(Du_\nu(x), E)\;dx \leq \\ &\leq c \cdot mis\left(\Omega - \tilde{\Omega}\right) + mis\left(\tilde{\Omega}\right) \cdot \frac{2}{\nu} \leq \\ &\leq \frac{c}{\nu} mis\,(\Omega) + \frac{2}{\nu} mis\left(\tilde{\Omega}\right) \leq \frac{\tilde{c}}{\nu} mis\,(\Omega)\end{aligned}$$

per una certa costante $\tilde{c} \in \mathbb{R}$. Pertanto, se $\nu \to \infty$, allora

$$\int_\Omega dist\,(Du_\nu, E)\;dx \to 0.$$

Poiché ora $u_\nu \to \varphi$ in $* - L^\infty$ e poiché $\|Du_\nu\|_{L^\infty} \leq 1$ essendo $Du_\nu \in intRcoE$, si ha che, a meno di sottosuccessioni $u_\nu \to \varphi$ in $*$-$W^{1,\infty}$ per il lemma 4.2 e la tesi è verificata.

Step 2: Resta da dimostrare che vale la condizione sufficiente (4.3). Per ipotesi $\xi \in RcoE_\delta$ e quindi, per il teorema 1.18, esiste $i \in \mathbb{N}$ tale che $\xi \in R_i coE_\delta$. Si procede per induzione su i. Se $i = 1$, allora $\xi \in R_1 coE_\delta$ e quindi esistono $A, B \in E_\delta = R_0 coE_\delta$, con $rg\,\{A - B\} = 1$ tali che

$$\xi = tA + (1-t)B.$$

Per il lemma di approssimazione 4.11, esiste $u \in C^1_{piec}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m\right)$ e $\Omega_A, \Omega_B \subset \Omega$ aperti disgiunti tali che

$$\begin{cases} \left|mis\,(\Omega_A) - t \cdot mis\,(\Omega)\right|, \left|mis\,(\Omega_A) - (1-t) \cdot mis\,(\Omega)\right| \leq \frac{1}{\nu}, \\ u \equiv \varphi \text{ in un intorno di } \partial\Omega, \\ \|u - \varphi\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{\nu} \text{ su } \Omega, \\ Du(x) = \begin{cases} A & \text{se } x \in \Omega_A, \\ B & \text{se } x \in \Omega_B, \end{cases} \\ dist\,(Du(x), co\,\{A, B\}) \leq \frac{1}{\nu} \text{ per q. o. } x \in \Omega. \end{cases} \tag{4.4}$$

In particolare, $dist\,(Du(x), E_\delta) = 0$. Poiché poi $rg\,\{A - B\} = 1$, $co\,\{A, B\} \subset RcoE_\delta$. Per l'ultima delle (4.4),

$$dist\,(Du(x), RcoE_\delta) \leq \frac{1}{\nu}.$$

Ponendo adesso $\tilde{\Omega} = \Omega_A \cup \Omega_B$, si hanno tutte le proprietà della condizione sufficiente.

Supponiamo adesso $i > 1$. Esistono allora $A, B \in R_{i-1}coE_\delta$ tali che

$$\xi = tA + (1-t)B,$$

con $rg\,\{A - B\} = 1$. Per il lemma di approssimazione 4.11, esistono Ω_A, Ω_B e $v \in C^1\,(\Omega, \mathbb{R}^m)$ tali che

$$\begin{cases} mis\,(\Omega - (\Omega_A \cup \Omega_B)) \leq \frac{1}{2\nu} mis\,(\Omega)\,, \\ v \equiv \varphi \text{ in un intorno di } \partial\Omega, \\ \|v - \varphi\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{2\nu}, \\ Dv(x) = \begin{cases} A & \text{se } x \in \Omega_A, \\ B & \text{se } x \in \Omega_B, \end{cases} \\ dist\,(Dv(x), RcoE_\delta) \leq \frac{1}{\nu} \text{ in } \Omega, \\ dist\,(Dv(x), E_\delta) \leq \frac{1}{\nu} \text{ in } \tilde{\Omega}. \end{cases}$$

Si applica l'ipotesi induttiva con A e B al posto di ξ per trovare due funzioni $v_A \in C^1_{piec}\,(\Omega_A)$, $v_B \in C^1_{piec}\,(\Omega_B)$ e due aperti $\tilde{\Omega}_A, \tilde{\Omega}_B$ tali che

$$\begin{cases} mis\left(\Omega_A - \tilde{\Omega}_A\right), mis\left(\Omega_B, \tilde{\Omega}_B\right) \leq \frac{1}{4\nu} mis\,(\Omega)\,, \\ v_A \equiv v \text{ in un intorno di } \partial\Omega_A, \\ v_B \equiv v \text{ in un intorno di } \partial\Omega_B, \\ \|v_A - v\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{2\nu} \text{ in } \Omega_A, \\ \|v_B - v\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{2\nu} \text{ in } \Omega_B, \\ dist\,(Dv_A(x), E_\delta) \leq \frac{1}{\nu} \text{ per q. o. } x \in \tilde{\Omega}_A, \\ dist\,(Dv_B(x), E_\delta) \leq \frac{1}{\nu} \text{ per q. o. } x \in \tilde{\Omega}_B, \\ dist\,(Dv_A(x), RcoE_\delta) \leq \frac{1}{\nu} \text{ per q. o. } x \in \Omega_A, \\ dist\,(Dv_B(x), RcoE_\delta) \leq \frac{1}{\nu} \text{ per q. o. } x \in \Omega_B. \end{cases}$$

Ponendo $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}_A \cup \tilde{\Omega}_B$ e

$$u(x) = \begin{cases} v(x) & \text{in } \Omega - (\Omega_A - \Omega_B), \\ v_A(x) & \text{in } \Omega_A, \\ v_B(x) & \text{in } \Omega_B \end{cases}$$

si ha la condizione sufficiente. □

4.2.2 Dimostrazione del teorema: caso vettoriale

Possiamo adesso dimostrare il teorema nel caso vettoriale. L'idea della dimostrazione è la stessa del caso unidimensionale, ma per una maggior chiarezza si ripetono i ragionamenti comuni alle due dimostrazioni.

Teorema 4.13. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e siano $E = O(m,n)$ e $K = coE$. Sia $\varphi \in C^1_{piec}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m\right)$ tale che $D\varphi \in E \cup intK$ quasi ovunque in Ω.*

Allora esiste (un insieme denso di) $u \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ tale che

$$\begin{cases} Du(x) \in E & \textit{per q. o. } x \in \Omega, \\ u \in \varphi + W^{1,\infty}_0(\Omega, \mathbb{R}^m). \end{cases}$$

Dimostrazione. Step 1: Si può supporre che Ω sia limitato, a meno di ricoprire Ω con $\Omega_0 = \{x \in \Omega \colon |x| < 1\}$ e $\Omega_k = \{x \in \Omega \colon k < |x| < k+1\}$ e trovare soluzioni u_k in ogni Ω_k, tali che $|u_k(x) - \varphi(x)| \leq \frac{1}{k}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Abbiamo visto nel capitolo 3 che

$$K = \left\{A \in \mathbb{R}^{m\times n} \colon \lambda_i(A) \leq 1 \text{ per ogni } i = 1, ..., n\right\}.$$

Sia $l = \min\{m, n\}$ e definiamo $F \colon \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ definita da

$$F(A) = \|A\|_2^2 - l.$$

Osserviamo immediatamente che $K \subset \{A \colon F(A) \leq 0\}$ e che $E \subset \{A \colon F(A) = 0\}$. Inoltre, F è convessa e quindi, in particolare, quasi-convessa. Siano

$$W = \Big\{u \in C^1_{piec}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m\right) : u \in \varphi + W^{1,\infty}_0(\Omega, \mathbb{R}^m),\ Du(x) \in E \cup intK \\ \text{per q. o. } x \in \Omega\Big\}$$

e $V = \overline{W}^{L^\infty}$. Poiché $\varphi \in W \subseteq V \neq \emptyset$, V risulta essere uno spazio metrico completo se dotato della norma L^∞. Dimostriamo adesso che

$$V \subset \left\{ u \in \varphi + W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m) : \; F(Du(x)) \leq 0 \text{ per q. o. } x \in \Omega \right\}. \qquad (4.5)$$

Se $u \in V$, allora per definizione esiste una successione $\{u_k\} \subset W$ tale che $u_k \to u$ in L^∞. In particolare, $Du_k(x) \in E \cup intK$ e quindi, per il lemma 4.2, a meno di sottosuccessioni $u_k \to u$ in *-$W^{1,\infty}$. Inoltre, $F(Du_k(x)) \leq 0$ per quasi ogni $x \in \Omega$.

Poiché F è quasi-convessa, il teorema 2.1 garantisce la semicontinuità inferiore del funzionale integrale definito da

$$I(u_k) = \int_\Omega F(Du_k(x)) \, dx,$$

cioè

$$\int_\Omega F(Du(x)) \, dx \leq \liminf_{k \to \infty} \int_\Omega F(Du_k(x)) \, dx.$$

Adesso, poiché $F(Du_k(x)) \leq 0$ per quasi ogni $x \in \Omega$, si ha che per ogni $\Omega' \subseteq \Omega$ misurabile,

$$\int_{\Omega'} F(Du_k(x)) \, dx \leq 0,$$

da cui, per semicontinuità, si ottiene che

$$\int_{\Omega'} F(Du(x)) \, dx \leq 0.$$

Per dimostrare che $F(Du(x)) \leq 0$ quasi ovunque in Ω, osserviamo che, indicato con

$$G_k = \left\{ x \in \Omega : \; F(Du(x)) \geq \frac{1}{k} \right\},$$

risulta

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} G_k = \{ x \in \Omega : \; F(Du(x)) > 0 \}.$$

Se per assurdo esistesse un $k \in \mathbb{N}$ tale che $mis(G_k) > 0$, allora risulterebbe

$$\int_{G_k} F(Du(x)) \, dx \geq \frac{1}{k} mis(G_k) > 0$$

che è assurdo. Pertanto $F(Du(x)) \leq 0$ e vale (4.5).

Step 2: Procediamo ora con un ragionamento fondamentale per l'utilizzo del teorema di Baire. Sia

$$V^k = \left\{ u \in V : \; I(u) > -\frac{1}{k} \right\}.$$

Risulta che V^k è aperto nella topologia di L^∞ perché I è semicontinuo inferiormente. Dimostriamo che V^k è denso in V. Dobbiamo quindi dimostrare che se $u \in V$, allora per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $u_\varepsilon \in V^k$ tale che

$$\| u_\varepsilon - u \|_{L^\infty} \leq \varepsilon.$$

Per come è definito V, si può supporre che $u \in W$ per poi concludere per densità nel caso generale. Inoltre, a meno di considerare ogni pezzo in cui u è regolare, si può anche supporre che $u \in C^1\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m\right)$. Si definiscono

$$\Omega_0 = \{x \in \Omega : \; Du(x) \in E\} = \{x \in \Omega : \; F(Du(x)) = 0\}$$

e

$$\Omega_1 = \Omega - \Omega_0 = \{x \in \Omega : \; F(Du(x)) < 0\}.$$

Per continuità, Ω_0 è chiuso in Ω e Ω_1 è aperto. Per lo stesso motivo, poiché Du è limitato e $F(Du(x)) \leq 0$, esiste $\beta > 0$ tale che $dist\,(Du(x), E) \leq \beta$ per quasi ogni $x \in \Omega$. Fissato k un intero, poiché $F\big|_E = 0$, per ogni $0 < \varepsilon < \frac{1}{k}$ esiste $\delta > 0$ tale che, se

$$\int_\Omega dist\,(Du(x), E)\; dx \leq \delta,$$

allora

$$\int_\Omega F(Du(x))\; dx \geq -\varepsilon.$$

Siamo nelle ipotesi del teorema di approssimazione 4.10 e quindi possiamo suddividere Ω_1 in aperti disgiunti, a meno di un insieme di misura arbitrariamente piccola, su cui approssimare u con una funzione u_s che abbia gradiente costante. Esiste cioè $u_s \in C^1_{piec}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m\right)$, un intero $J \in \mathbb{N}$, $\Omega_{s,j} \subset \Omega_1$ aperti disgiunti, $1 \leq j \leq J$, tali che

$$\begin{cases} u_s \equiv u \text{ in un intorno di } \partial\Omega_1, \\ \|u_s - u\|_{W^{1,\infty}} \leq \frac{\varepsilon}{2}, \\ Du_s(x) \in intK \text{ per q. o. } x \in \Omega_1, \\ mis\left(\Omega_1 - \bigcup\limits_{j=1}^{J} \Omega_{s,j}\right) \leq \frac{\delta}{2\beta}, \\ Du_s(x) = \xi_{s,j} \text{ se } x \in \Omega_{s,j}. \end{cases}$$

Grazie al lemma 4.12 possiamo ora approssimare ciascuna delle u_s con funzioni che abbiano quasi ovunque il gradiente in $E \cup intK$ e che disti poco, in senso integrale, da E. Esiste cioè $u_{j,\nu} \in C^1_{piec}\left(\overline{\Omega}_{s,j}, \mathbb{R}^m\right)$ tale che

$$\begin{cases} u_{j,\nu} \in u_s + W_0^{1,\infty}\left(\Omega_{s,j}, \mathbb{R}^m\right), \\ \|u_s - u_{j,\nu}\|_{L^\infty} \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ in } \Omega_{s,j}, \\ Du_{j,\nu}(x) \in E \cup intK \text{ quasi ovunque in } \Omega_{s,j}, \\ \int\limits_{\Omega_{s,j}} dist\left(Du_{j,\nu}(x), E\right) dx \leq \frac{\delta}{2} \cdot \frac{mis(\Omega_{s,j})}{mis(\Omega_1)}. \end{cases}$$

Si definisce allora

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} u(x) \text{ se } x \in \Omega_0, \\ u_s(x) \text{ se } x \in \Omega_1 - \bigcup\limits_{j=1}^{J} \Omega_{s,j}, \\ u_{j,\nu}(x) \text{ se } x \in \Omega_{s,j}. \end{cases}$$

Si ha che $u_\varepsilon \in C^1_{piec}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m\right)$ e inoltre

$$\begin{cases} u_\varepsilon \in u + W_0^{1,\infty}\left(\Omega, \mathbb{R}^m\right), & \\ \|u_\varepsilon - u\|_{L^\infty} \leq \varepsilon & \text{in } \Omega, \\ Du_\varepsilon(x) \in E \cup intK & \text{per q. o. } x \in \Omega. \end{cases}$$

Dunque,

$$\int_{\Omega} dist\,(Du_\varepsilon(x), E)\ dx = \int_{\Omega_0} dist\,(Du_\varepsilon(x), E)\ dx + \int_{\Omega_1} dist\,(Du_\varepsilon(x), E)\ dx =$$

$$= \int_{\Omega_1} dist\,(Du_\varepsilon(x), E)\ dx =$$

$$= \int_{\Omega_1 - \cup\Omega_{s,j}} dist\,(Du_\varepsilon(x), E)\ dx + \sum_{j=1}^{J} \int_{\Omega_{s,j}} dist\,(Du_\varepsilon(x), E)\ dx \leq$$

$$\leq mis\left(\Omega_1 - \bigcup_{j=1}^{J} \Omega_{s,j}\right)\beta + \sum_{j=1}^{J} \int_{\Omega_{s,j}} dist\,(Du_\varepsilon(x), E)\ dx \leq$$

$$\leq \frac{\delta}{2\beta}\beta + \sum_{j=1}^{J} \frac{\delta}{2} \cdot \frac{mis\,(\Omega_{s,j})}{mis\,(\Omega_1)} \leq \delta.$$

Pertanto

$$\int_{\Omega} dist\,(Du_\varepsilon(x), E)\ dx \leq \delta$$

e quindi, per quanto osservato,

$$I\,(u_\varepsilon) \geq -\varepsilon > -\frac{1}{k}$$

cioè $u_\varepsilon \in V^k$, provando la densità di V^k in V. Per il teorema di Baire, allora, l'insieme

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} V^k = \{u \in V :\ I(u) \geq 0\}$$

è denso in V.

Step 3: Per concludere, è evidente che le funzioni che hanno gradiente quasi ovunque ortogonale sono un sottoinsieme di $\cap V^k$, e, viceversa, come visto nell'osservazione 3.10, se $u \in \cap V^k$, allora $Du \in E \cup intK$ e quindi ogni valore singolare di Du è minore o uguale a 1 e

$$\|Du\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2\,(Du) = l$$

per cui l valori singolari di Du devono essere uguale a 1 per quanto visto nell'osservazione 3.5. Se $n \leq m$, è ovvio che gli n valori singolari siano uguali a 1. Se invece $m \leq n$ è necessario osservare che $n-m$ valori singolari di qualsiasi matrice sono nulli e che quindi gli altri $m = l$ valori singolari sono uguali a 1. Risulta cioè che $Du \in E = O(m,n)$, concludendo la dimostrazione del teorema. $\square$

Bibliografia

[1] H. Brezis, *Analisi funzionale: teoria e applicazioni*, Napoli, Liguori Editore, 1986.

[2] A. Cellina, *On the differential inclusion* $x' \in \{-1, 1\}$, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **69**, 1980, pp. 1-6.

[3] B. Dacorogna, *Direct Methods in the Calculus of Variations*, New York, Springer-Verlag, 2010^2.

[4] B. Dacorogna & P. Marcellini, *Cauchy-Dirichlet problem for first order nonlinear systems*, J. Functional Analysis **152**, 1998, pp. 404-446.

[5] B. Dacorogna & P. Marcellini, *Implicit Partial Differential Equations*, Boston-Basel-Berlin, Birkhäuser, 1999.

[6] B. Dacorogna & P. Marcellini & E. Paolini, *Origami and Partial Differential Equations*, Notices of American Mathematical Society, Volume **57**, numero 5, 2010, pp. 598-606.

[7] R. Magnanini, *Dispense del corso di Analisi III*, 2014.

[8] L. Mirsky, *A trace inequality of John Von Neumann*, Monatsh. für Math. **79**, 1975, pp. 303-306.

[9] J. Von Neumann, *Some matrix inequalities and metrization of matrix-space*, Tomsk Univ. Rev., 1937, pp. 286-300.